



गणित अध्यापनशास्त्र

आढावा :

शालेय शिक्षणात गणिताला महत्त्वाचे स्थान आहे. शालेयस्तरावर गणित अनिवार्य विषय आहे. कित्येकांना वाटते की गणितामुळे मुलांच्या मनात भीती आणि ताणतणाव निर्माण होतो. वर्गावर पाठ निरीक्षण केल्यास गणिताच्या शिकविण्याच्या पद्धतीमुळे हा ताण/भीती निर्माण होते असे प्रथमदर्शी वाटते. ही बाब लक्षात घेऊन या घटकसंचामध्ये विद्यार्थिकेंद्रित शिक्षणाच्या माध्यमातून प्राथमिक व उच्च प्राथमिक स्तरातील मुलांमध्ये गणिती क्षमता व गणिती कौशल्ये विकसित व्हावी यावर भर देण्यात आला आहे. त्यामध्ये सातत्यपूर्ण सर्वेकष मूल्यमापनाबरोबरच विविध क्षमता असणारी सर्व मुले तणावमुक्त वातावरणात एकत्रितपणे सहभागी होऊ शिकतील त्यासाठी प्रयत्न केला आहे.

अध्ययन उद्दिष्टे

या घटकसंचाचा अभ्यास केल्यानंतर शिक्षक –

- वर्गातील मुलांना शिकण्यासाठी प्रवृत्त कसे करावे? त्यांच्या मूल्यांकनासह वर्गाध्यापनात कोणत्या आंतरक्रियात्मक कार्यनिती वापरण्यात? (Transactional Strategies) असे अनेक प्रयोग करण्यास सक्षम होतील. जसे :
 - राज्यस्तरावरील अभ्यासक्रमात दिलेल्या अध्ययन निष्पत्तीला क्षमता व कौशल्यांची जोड देतील, त्यांच्यातील सहसंबंध समजून घेतील.
 - प्रत्येक स्तरावरील मुलांसाठी निश्चित केलेल्या अध्ययन निष्पत्ती संपादित करण्याकरिता वर्गाध्यापनाच्या योग्य पद्धती ठरवतील/अंगीकारतील.
 - वर्गप्रक्रिया व मूल्यांकन यांच्या एकात्मिकरणातून सर्व मूल्यांच्या अध्ययन प्रक्रियेविषयक सतत खात्री करून घेतील.

गणिताचे स्वरूप समजणे :

गणितामुळे आपल्या कल्पना व विचार प्रमाणित होतात. त्यात अचूकता येते. दैनंदिन जीवनातील अवकाशीय संकल्पना तर्कसंगतता वापरण्यात त्याची मदत होते. निसर्गातील विज्ञान, अभियांत्रिकी (इंजिनिअरिंग), औषधशास्त्र चिकित्सा व सामाजिक शास्त्रासहित अनेक क्षेत्रांत संपूर्ण जगात गणित एक महत्त्वाचे साधन म्हणून वापरले जाते. दैनंदिन जीवनात अनेक परिस्थितीत गणिताची मदत होते. एवढेच नाही तर तर्कसंगत व अमूर्त विचार आणि कल्पनाशक्तीचा विकास सुद्धा गणितामुळेच होतो. या सर्व कारणांमुळे शालेय शिक्षणात गणिताला अनन्यसाधारण व महत्त्वपूर्ण स्थान आहे, म्हणून दहावीपर्यंत 'गणित – एक अनिवार्य विषय' म्हणून शिकविला जातो.

शालेय गणित शिक्षणातील काही समस्या :

- मूल – जेव्हा मी एका नैसर्गिक संख्येला दुसऱ्या संख्येने गुणतो, तेव्हा त्यांचा गुणाकार हा त्या दोन संख्यांपेक्षा मोठा येतो. परंतु जेव्हा मी एका अपूर्णाकाला दुसऱ्या अपूर्णाकालेने गुणतो तेव्हा त्यांचा गुणाकार लहान येतो. असे का होते? हे मला समजत नाही.



- बहुसंख्य मुलांना गणिताबद्दल भीतीची व कमतरतेची भावना असते. या समस्येच्या निराकरणासाठी आजचा अभ्यासक्रम काहीही करीत नाही. त्याचबरोबर दुसऱ्या टोकाला जी इतर मुले बुद्धिमान असतात व ज्यांना गणित आवडते त्यांचाही विचार अभ्यासक्रमात होत नाही.
- अभ्यासक्रमातील पाठ्यक्रम हा अतार्किक असतो. अमूर्तीकरणाच्या पातळीच्या बाबतीतील प्रवास तो प्राथमिक ते माध्यमिक ते उच्च माध्यमिक अडखळत, गचके खात करतो.
- गणिती पेच, सराव आणि मूल्यांकनाच्या पद्धती या तांत्रिक पुनरुक्तीपर व अंकगणितावर अतिरिक्त भर देणाऱ्या असतात. अवकाशाच्या विचार पद्धती सारखे गणित विषय अभ्यासक्रमांमध्ये फारसे विकसित केले जात नाहीत.
- शिक्षकांमध्ये आत्मविश्वासाचा, पूर्वतयारीचा अभाव असतो आणि त्यांच्यासाठीची साहाय्यकारी यंत्रणादेखील अस्तित्वात नसते.

(राष्ट्रीय अभ्यासक्रम आराखडा - 2005 मधून)

पूर्व प्राथमिक (शाळापूर्व) स्तरावर मुलांमधील गणनपूर्व कौशल्य विकसित करणे :

- **गणनपूर्व कौशल्ये** : वर्गीकरण, आकृतिबंध, क्रमसंबंध, एकास-एक संगती ही अशी कौशल्ये आहेत, जी गणन कौशल्ये व क्षमता विकासासाठी आधारभूत मानली जातात.
- मुलांनी वस्तू मोजण्याच्या आधी त्यांना गणनपूर्व कौशल्यांत सक्षम होईपर्यंत भरपूर वेळ व जास्तीत जास्त संधी देणे अपेक्षित आहे. जसे -
वस्तूचे वर्गीकरण करणे (ज्यात एक किंवा अधिक गुणधर्मानुसार), मूर्त वस्तूंचा विविध प्रकारे क्रम लावणे, एकास-एक संगती लावणे यांसारख्या अनुरूप विविध प्रात्यक्षिक व कृती करून घेणे, कारण त्यामुळे मुलांमध्ये 'वस्तू मोजणे' या कौशल्यासाठीचा पाया तयार होईल.
- पूर्व प्राथमिक स्तरावर तुम्ही मुलांमध्ये गणिती कौशल्ये व क्षमता निर्माण करण्यासाठी खालील संकल्पनांद्वारे मदत करू शकता. उदा. **संख्याबोध** (Number Sense) : पुढील व मागील संख्या सांगणे, संख्या व वस्तू अचूक मोजणे, मूलभूत क्रियांच्या आधारे करून संख्यांमधील संबंध पाहणे, **विविध रूपात संख्या दाखविणे** (शब्द, चित्र, प्रतीके, वस्तूंच्या सहाय्याने जसे - खडे, ठोकळे इत्यादी)
अवकाशीय संबोध : आकार, माप, अवकाश, स्थान, दिशा, गती इ. संकल्पना.
मापन : लांबी, रुंदी, उंची, वजन, काळ/वेळ स्वतःच्या पद्धतीने व नंतर प्रमाणित एकक वापरून शोधणे.
अनुमान करणे : आकार, वजन यांचा योग्य अंदाज बांधता येणे.
आकृतिबंध : संख्या, आकृती, चित्र यांची मांडणी पाहून तर्कसंगत विचार करून आकृतिबंध ओळखता येतो.
समस्या निराकरण : समस्येच्या माध्यमातून विचार करण्याची क्षमता व उत्तरापर्यंत पोहोचण्याचे अनेक मार्ग असतात याचे आकलन होणे.
- कृत्रिम परिस्थिती निर्माण करून मुलांना वरील क्षमता विकसनात मदत करण्यासाठी त्यांच्या अनुभवविश्वातील त्यांच्या परिसरातील उदाहरणे घ्यावीत. जसे -
वर्गीकरण क्षमतेसाठी संधी देताना मुलांना ओळखीच्या, हाताळलेल्या वस्तू, साहित्य द्यावे. ज्याचे वर्गीकरण वैशिष्ट्यानुसार, गुणधर्मानुसार फक्त अवलोकन करून सहजरित्या दोन गटांत करता येईल.
उदा. रंग, आकार इत्यादी. अनेक गटांत वर्गीकरण करण्यास सांगावे.
नंतर आकार, स्थान, स्थिती, दिशाबोध इ. गुणधर्मांमध्ये किंचित जटिलता वाढविता येईल.



यातून आपल्यापुढे महत्त्वाचा प्रश्न उभा राहतो की, शालेय स्तरावर गणित शिक्षणाचे मुख्य ध्येय काय आहे?

- मुलांमध्ये फक्त, संख्यात्मक कौशल्यांचा विकास करून त्यांना फक्त रोजगारक्षम बनवायचे आहे की अशा व्यक्ती तयार करायच्या आहेत ज्या दीर्घकाळ समाजाच्या सामाजिक आणि आर्थिक विकासात योगदान देत राहतील?

याकरिताच समाजासाठी आस्था असणाऱ्या, विचार करणाऱ्या चिंतनशील व्यक्ती तयार करण्यासाठी शालेय स्तरावर गणित शिक्षण बहुमोल ठरते.

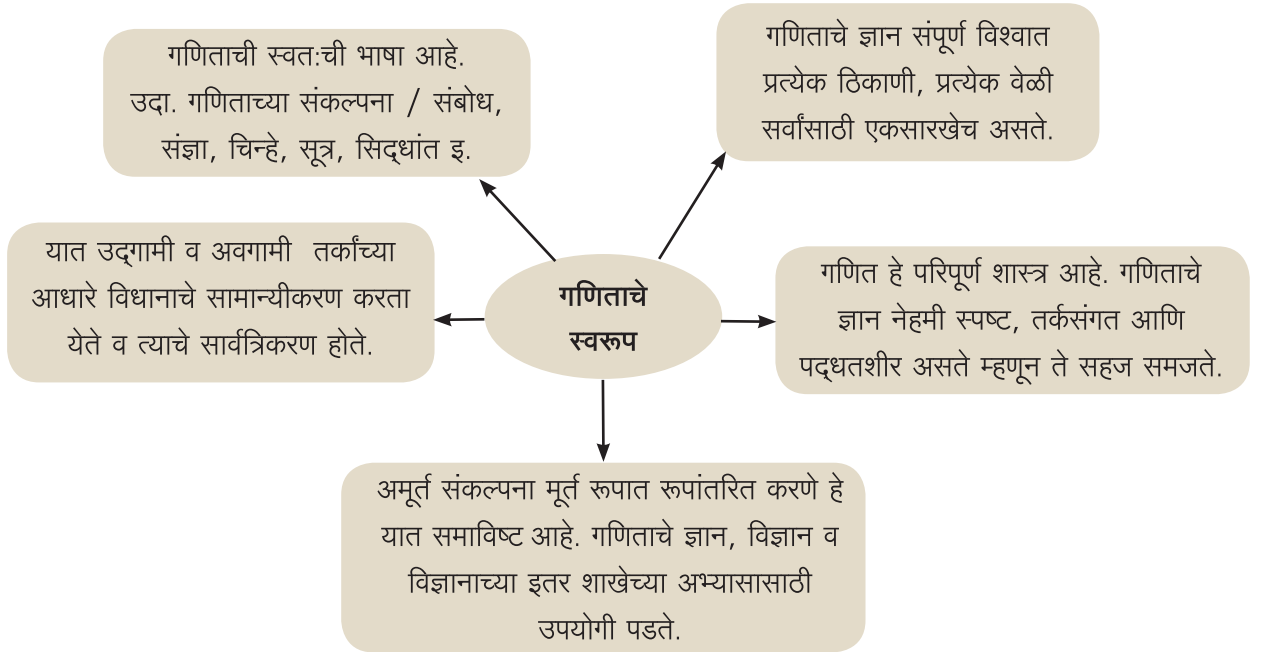
या घटकसंचामध्ये आपण अशा सर्व मार्गांची चर्चा करणार आहोत. यातून आपण विद्यार्थ्यांना गणिताबद्दल विचार करायला लावू व त्यांच्या या विचार प्रक्रियांचे गणितीकरण करू. अर्थात या प्रक्रियेत त्यांना मदत करू.

चला पाहू तर गणित म्हणजे काय? गणिताला इंग्रजीत 'मॅथेमेटिक्स' (Mathematics) असे म्हणतात. जो ग्रीक शब्द 'मेथमा' (Mathema) वरून आला आहे. ज्यांचा अर्थ आहे विज्ञान (Science).

ऑक्सफर्ड शब्दकोषात गणिताची व्याख्या आहे - 'अवकाश, संख्या व राशींचे (मापनांचे) विज्ञान.' (The Science of space, number and quantity).

मूलतः गणित हे मापन, आकृतिबंध व सममितीच्या अभ्यासाचा शोध घेण्याची पद्धत होय.

या पद्धतीमध्ये पूर्वधारणा, स्वयंसिद्धतथ्ये / गृहितके, तर्कशुद्ध आकलन वापरून व गणिताचे प्रत्येक सिद्धांत / व्याख्या व संकल्पना / संबोध तयार होतात.



प्राथमिक स्तरावर गणित :

संपूर्ण समाजासाठी, प्राथमिक शाळेतील शिक्षकांचे काम अत्यंत महत्त्वाचे व निर्णायक आहे हे आपण मान्य केले पाहिजे. प्राथमिक शिक्षकांवर खूप मोठी जबाबदारी आहे. केवळ प्राथमिक शिक्षकांमुळेच ठरते की विद्यार्थी पुढील शालेय स्तरावर काय व कसे शिकणार आहेत. प्राथमिक स्तरावर शिक्षण देण्यासाठी विशेष नैपुण्य लागते. ज्यात ज्ञान व कौशल्ये दोन्ही अंतर्भूत आहेत. असे नैपुण्य प्राप्त होण्यासाठी बराच अवधी लागतो. यासाठी स्वतःच्या कामाचे सतत विश्लेषण करून त्यात सुधारणा करणे, काळानुसार अध्यापनात योग्य



तो बदल करून निरंतर प्रगती करत राहणे महत्त्वाचे आहे. या वयात मुलांचे विचार, मूर्त वस्तू व त्यांना परिचित संदर्भाभोवतीच असतात. म्हणून अध्यापन-अध्ययन प्रक्रियेत मुलांना गुंतवून ठेवणे, मूर्त वस्तूंच्या इच्छित हालचाली करून घेणे इत्यादी बाबींवर लक्ष केंद्रित करणे गरजेचे आहे.

या स्तरावर अध्यापनशास्त्रात खालीलप्रमाणे कृतींचा वापर करून संकल्पना, क्षमता व कौशल्ये विकसित करता येतील.

शालेय गणितासाठी भविष्यवेधी दृष्टी :

- विद्यार्थी गणिताचा आनंद घेण्यास शिकतील, त्यांच्यामध्ये गणिताची भीती राहणार नाही.
- विद्यार्थी गणिताचे महत्त्व जाणतील. गणित हे सूत्रे व तांत्रिक पद्धती यापेक्षा काहीतरी अधिक आहे हे समजतील.
- मुले गणित म्हणजे आपापसात बोलण्याची, संवाद साधण्याची, चर्चा करण्याची तसेच एकत्रितपणे काम करण्याची गोष्ट म्हणून पाहतात.
- मुले अर्थपूर्ण प्रश्न मांडतात व ते सोडवितात.
- परस्परसंबंध समजण्यासाठी, रचना पाहण्यासाठी विवेक व युक्तिवाद करण्यासाठी, विधानांची सत्यासत्यता पडताळण्यासाठी मुले अमूर्त संकल्पनांचा वापर करतात.
- मुलांना गणिताची मूलभूत संरचना समजते : अंकगणित, बीजगणित, भूमिती आणि त्रिकोणमिती हे शालेय गणितातील मुख्य क्षेत्रे, ज्या साऱ्यांतून अमूर्तीकरण, रचनाकरण व सामान्यीकरण यांसाठीची एक पद्धत मिळते.
- प्रत्येक मूल गणित शिकू शकते या विश्वासाने शिक्षक वर्गातील प्रत्येक विद्यार्थ्याला त्यात सहभागी करून घेतात.

अनुभव :

मुलांना मूर्त वस्तू खेळणी, अध्ययन साहित्य हाताळण्याचे अनेक अनुभव द्यावेत. नवीन संकल्पना समजण्यासाठी ही खरी गुरुकिल्ली आहे. या स्तरावर दिलेल्या अध्ययन अनुभवांचा वर्गात व वर्गाबाहेरील जगाशी मजबूत संबंध असायला हवा. शिवाय मुलांना दिले जाणारे हे अनुभव अन्वेषण शैलीचे म्हणजे शोध घेणारे असावेत, जेणेकरून त्या अनुभवाला ते दैनंदिन जीवनाशी जोडू शकतील व खरे शिकणे घडेल.

उदा. संख्यांच्या बेरजेसाठी त्यांच्या परिसरातील कोणत्याही वस्तूंचे दोन समूह द्यावेत. ते दोन्ही समूह एकत्रित करतील व परत सर्व वस्तू मोजून पाहतील. जसे – सफरचंद किंवा कोणतीही फळे दोन गटांत द्यावीत. दोन्ही गटांतील फळे एकत्रित करून एकूण फळे मोजता येतील हे पहावे. अशा प्रकारे अनेकवेळा दिलेले गट एकत्रित करून संख्यांची बेरीज करण्याचा आत्मविश्वास त्यांच्यामध्ये येईल. त्यानंतर त्यांना समस्या मांडण्याची संधी द्यावी.

उदा. 1) $235 + 367 = 602$ आहे तर $234 + 369 =$ किती हे उत्तर कसे काढाल ?

उदा. 2) 5384 या संख्येतील कोणताही एक अंक बदलून टाका. संख्या वाढली की कमी झाली ?

उदा. 3) समान वस्तू घेतलेले भिन्न गट देऊन एकत्रित करण्यास सांगा, जसे – मुले व मुलींचा गट एकत्रित केल्यास एकूण विद्यार्थी किंवा एकूण मुलांचा गट तयार होईल.

सुरुवातीला दिलेले गट एकत्रित करून बेरीज मिळविण्यासाठी ते सर्व वस्तू परत मोजतात, परंतु नंतर वस्तू मोजताना स्वतःच्या वेगळ्या पद्धती शोधतील.

भाषा :

प्रत्येक मुलास आपला अनुभव, निरीक्षणे, गृहितके, स्वभाषेतून मांडण्याची योग्य संधी द्यावी. या चर्चेदरम्यान आपोआप मुलांचे भाषा कौशल्य, प्रश्न तयार करणे, विषयाशी संबंधित नवी शब्दसंपत्ती तयार करणे, विषयाची परिभाषा समजणे इत्यादी विकसित



होईल. जसे -

पाच चांदण्यांचा एक समूह (गट) व तीन चांदण्यांचा दुसरा समूह एकत्रित केल्यावर मिळणाऱ्या समूहात एकूण आठ चांदण्या होतील.

चित्रात्मक प्रस्तुती :

मुलांना चित्रांच्या माध्यमातून निष्कर्ष शोधण्यास सांगावा. खाली दिलेल्या चित्रात प्रश्न आणि त्याचे समाधान दोन्ही दाखविले आहे ते पहा.



यामुळे वरच्या इयत्तेत गेल्यावर मुलांना गणिती कल्पना/आकृतीद्वारे उत्तर/चित्ररूप कसे प्रस्तुत करावे इत्यादी शिकण्यास मदत होईल.

प्रतिके :

अंततः मुलांना प्रतिके वापरून मांडणी कशी करतात व त्या मांडणीतून निष्कर्ष कसा काढायचा हे समजण्याच्या संधी द्याव्यात.

उदा. $5 + 3 = 8$

विद्यार्थ्यांना स्वतःची निरीक्षणे मांडण्यासाठी प्रतिकांचा अर्थ समजून प्रतिके वापरण्यास प्रोत्साहित करा. या प्रतिकांचा संबंध गणिताच्या मूलभूत क्रियांचे चिन्ह म्हणून होतो, या चिन्हांमुळे गणितीय राशी किंवा समीकरण कसे तयार झाले यावर भर द्यावा किंवा हे शिकण्यासाठी प्रोत्साहन द्यावे.

या पद्धतीने शिकविल्यामुळे विद्यार्थ्यांना त्यांचे विचार अचूक व स्पष्टपणे मांडता येतील. अशा प्रकारे त्यांनी अभ्यास केला तर वाचन व लेखनासंबंधी अन्य क्षमता तसेच विचारांची अभिव्यक्ती करता येईल आणि समस्यांचे निराकरण शोधता येईल. अशाप्रकारे विविध क्षमता समग्रपणे विकसित होतील.

गणिताबरोबर भाषा व परिसर अभ्यासाचे एकात्मिककरण :

शालेय जीवनाच्या सुरुवातीच्या इयत्ता, अर्थात इ. पहिली व दुसरीमध्ये विद्यार्थी फक्त एक किंवा दोनच भाषा आणि गणित विषय शिकतात परंतु आसपासचा परिसर समजून घेण्यासाठी, प्रभावी संप्रेषण व त्याचे आकलन याकरिता भाषा हे प्रभावी साधन आहे. तसेच समस्या निराकरणासाठी आवश्यक गणितीय संकल्पना व संबोध या दोन्ही विषयांमध्ये एकात्मिकीकरण झालेले दिसते.

विशेषतः प्रारंभिक गणित विषयक अध्ययन-अध्यापन प्रक्रियेत शिक्षकांनी विद्यार्थ्यांचा सर्वांगीण विकास तसेच गणित, भाषा व परिसर अभ्यास विषयक अध्ययन निष्पत्तींचे विकसन त्यांच्या परिसरातील अनुभवविश्वातील उदाहरणे देऊन एकात्मिक पद्धतीने करणे गरजेचे आहे.

उदा. संख्यांविषयी बोलताना परिसरात त्या कुठे आढळतात? दैनंदिन जीवनात संख्या व त्यांवरील क्रिया कोठे उपयोगी पडतात? संख्या, संख्यात्मक प्रतीके, चिन्हे न वापरता परिसराचे वर्णन कसे करता येईल? इत्यादी प्रकारे वर्गात चर्चा घडवून आणावी. त्यामुळे विद्यार्थ्यांच्या असे लक्षात येईल की गणितीय संज्ञा, प्रतीके व चिन्हे हे सर्व कोणत्याही भाषेचा अविभाज्य भाग आहे.

उदा. गणितात मापनासंबंधी चर्चा करताना दैनंदिन व्यवहारात त्यासाठी वापरली जाणारी एकके, त्याचा उपयोग हे तर अनेकवेळा संवादासाठी भाषेमध्ये वापरली जातात त्याची विद्यार्थ्यांना जाणीव होईल.

अभ्यासक्रम तयार करताना ज्ञानाची विभागणी विविध विषयांमध्ये केली जाते : मूल त्याच्या आसपासच्या परिसरातील आंतरक्रियांमधून पडणाऱ्या अनेक प्रश्नाची उत्तरे ते शालेय प्रक्रियेतून शोधण्याचा प्रयत्न करते. त्याला या विषयांच्या सीमेत बांधून न ठेवता शाळा व शाळेबाहेरील वातावरणातून या समग्र शोधनाचा आनंद घेऊ द्यावा.



उच्च प्राथमिक स्तरावर गणित :

उच्च प्राथमिक स्तरावर गणितासाठी मोठे आव्हान आहे कारण येथे गणिताची दुहेरी भूमिका आहे. एकीकडे विद्यार्थ्यांचे अनुभव व त्याच्या परिसरातील मूर्त, अमूर्त कल्पना आहेत तर दुसरीकडे गणिताच्या अमूर्ततेकडे त्याला न्यायचे आहे. या वयात मुले स्वतःच्या फक्त विचारांवर, कल्पनांवर काम करण्यास सक्षम नसतात. त्यांना अनुभवांचे अर्थ समजून घेण्यासाठी प्रतिकृतींची/संदर्भाची जोड द्यावी लागते. या स्तरावर मुलांना शिकण्याच्या प्रक्रियेत गुंतवून ठेवणे व हळूहळू त्यांचे या बाबींवरील अवलंबन कमी करणे हे मोठे आव्हान असते.

संदर्भीय परिस्थितीत दडलेले तत्त्व शोधणे किंवा तेथे कोणते तथ्य वापरावे हे स्वतः ठरवतील. याकरिता त्यांचे प्रतिकांवरील/संदर्भांवरील अवलंबन कमी व्हायला हवे. विद्यार्थ्यांची प्रगती व्हायला हवी कारण पुढे माध्यमिक शाळेत विद्यार्थ्यांकडून अशा प्रकारच्या अपेक्षा केल्या जातात.

उदा. इयत्ता पाचवीपर्यंत विद्यार्थ्यांनी प्रत्यक्ष वस्तूंची गणना करण्यासाठी आवश्यक मोजसंख्या/नैसर्गिक संख्या माहीत असतात. तर इयत्ता सहावीत विद्यार्थ्यांसमोर ऋण संख्या व पूर्णांक संख्या येतात, संख्यांचे विविध आकृतिबंध येतात व त्याचे सामान्यीकरणही करणे अपेक्षित आहे. इयत्ता सहावीपासून म्हणजे उच्च प्राथमिक स्तरावर विद्यार्थी 'अंकगणिताचे सामान्यीकरण म्हणजे बीजगणित' हे ही शिकतात व वापरतात. संख्यांसाठी प्रतीके/अक्षरे वापरून अचूक सामान्यीकरण करतात. संख्यांच्या आकृतिबंधावरून सामान्यीकरण शिकतात. याशिवाय भूमितीत द्विमितीय (2D) व त्रिमितीय (3D) आकारांचे विश्लेषण व वर्गीकरण हे उद्दिष्ट आहे. त्रिमितीय वस्तूंचे शिरोबिंदू, कडा, कोपरे व पृष्ठांची संख्या यांवरून त्याचे गुणधर्म जाणतात. त्यांनी गुणधर्मांचे सामान्यीकरण करून सूत्र/नियम तयार करण्यास सक्षम झाले पाहिजे.

उदा. कोणत्याही बहुभुजाकृतीच्या आंतरकोनांची बेरीज, बाजूंच्या संख्येपेक्षा $(n) 2$ ने कमीची 180° पट असते. म्हणजेच $180^\circ (n - 2)$ असते. दोन एकरूप त्रिकोणांपासून समांतरभुज चौकोन तयार होतो. म्हणून त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ समांतरभुज चौकोनाच्या क्षेत्रफळाच्या निम्मे असते.

इयत्ता दहावी व बारावीमध्ये विद्यार्थ्यांनी ही सामान्यीकरण केलेली विधाने सिद्ध करणे अपेक्षित असते.

अध्यापनशास्त्रीय प्रक्रिया :

गणिताच्या अध्ययनास प्रभावित करणारे अनेक घटक/कारणे आहेत. पण विद्यार्थ्यांसाठी गणिताच्या अध्ययनात, शिक्षकांची भूमिका सर्वात जास्त महत्त्वाची आहे. म्हणून शिक्षकांनी हे समजून घेणे जरूरीचे आहे की गणिताचे प्रभावी शिक्षण देणे म्हणजे काय? ते कसे देता येईल? समाजात ही धारणा आहे की गणिताच्या शिक्षकाला जर गणित चांगले येत असेल तरच तो विद्यार्थ्यांना गणित चांगले शिकवू शकतो. ही मान्यता बदलण्यासाठी शिक्षक काय करू शकतील?

पण चांगले गणित शिकविता येणे म्हणजे काय? फक्त गणिताचे खूप चांगले ज्ञान आहे म्हणून शिक्षक चांगले गणित शिकवू शकतील असेही नाही. गणिताच्या उत्तम ज्ञानासोबतच शिककाला हे ही ज्ञान असले पाहिजे की, 'गणित शिकवावे कसे?' गणिताचे ज्ञान व त्या सोबत ते कसे शिकवावे याचेही ज्ञान असणे. त्यालाच अध्यापन शास्त्राचे आशयज्ञान म्हणतात. (P.C.K. - Pedagogical Content Knowledge)

आनंददायी गणित शिकणे होण्यासाठी मुख्य व आवश्यक प्रक्रिया खालीलप्रमाणे आहेत -

- सहभागित्व (Participation)
- गुंतवून ठेवणे (Engagement)
- निरीक्षण (Observation)
- परिकल्पना मांडणे व पडताळणी करणे (Making hypothesis and verifying them)
- समस्या दर्शविणे (Problem Posing)
- समस्या सोडविणे (Problem Solving)



- दृश्यरूपात कल्पना करणे व सादरीकरण करणे (Visualisation and Representation)
- परस्पर सहसंबंध जोडणे. (Making Connections)
- प्रमाणबद्ध तर्क करणे. (Systematic Reasoning)
- गणितीय संप्रेषण/संवाद. (Mathematical Communication)

राष्ट्रीय पातळीवर होणाऱ्या राष्ट्रीय संपादनूक सर्वेक्षण 2017 (NAS 2017) मध्ये अध्ययन निष्पत्तींवर आधारित इयत्ता तिसरी, पाचवी व आठवी गणित विषयात अचूक प्रतिसाद नोंदविलेल्या विद्यार्थ्यांचे सरासरी प्रमाण खालीलप्रमाणे आहे.

इयत्ता तिसरी : 64% इयत्ता पाचवी : 53% इयत्ता आठवी : 42%

याचप्रमाणे राज्य / संघराज्य पातळीवरील सरासरी संपादनूक व जिल्हा / तालुका पातळीवर सरासरी संपादनूक किती आहे? हे तुम्हांला माहित आहे का?

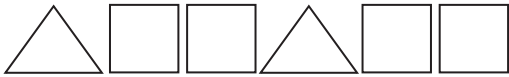
अधिक माहितीसाठी - <http://www.ncert.nic.in/programmes/NAS/SRC.html> या वेबसाईटला भेट द्या. आपल्या विद्यार्थ्यांच्या गणित अध्ययन निष्पत्तीचा निकाल सुधारण्यासाठी चिंतन व प्रयत्न करण्याची गरज आहे.

अध्ययन निष्पत्ती :

इयत्ता पहिली

अध्ययनार्थी -

- 1 ते 20 पर्यंतच्या संख्यांवर कृती करतात.
- वस्तूंचा आकार आणि लहान-मोठेपणा यानुसार वस्तूंचे वर्गीकरण करतात.
- वस्तूंच्या, चित्रांच्या किंवा चिन्हांच्या साहाय्याने 20 पर्यंतच्या संख्यांची नावे म्हणतात आणि मोजतात.
- 1 ते 9 अंकांचा वापर करून वस्तू मोजतात.
- 20 पर्यंतच्या संख्यांची तुलना करतात. उदा. वर्गातील मुले आणि मुली यांपैकी कोणाची संख्या जास्त आहे, हे सांगतात.
- दैनंदिन व्यवहारात बेरीज-वजाबाकीसाठी 1 ते 20 पर्यंतच्या संख्यांचा वापर करतात.
- वस्तू वापरून 9 पर्यंतच्या संख्यांच्या, बेरजांची रचना करतात. उदा. $3 + 3$ हे उदाहरण 3 च्या पुढे 3 पायऱ्या मोजून $3 + 3 = 6$ असा निष्कर्ष काढतात.
- वस्तू वापरून 1 ते 9 अंकांच्या मदतीने वजाबाकी करतात. उदा. 9 वस्तूंच्या समूहातून 3 वस्तू बाजूला काढतात आणि उरलेल्या वस्तू मोजून $9 - 3 = 6$ असा निष्कर्ष काढतात.
- दैनंदिन जीवनातील 9 पर्यंतच्या संख्यांच्या बेरीज-वजाबाकीवर आधारित प्रश्न सोडवितात.
- 99 पर्यंतच्या संख्या ओळखतात आणि अंकांत लिहितात.
- आकार, वस्तू आणि संख्यांमधील आकृतिबंधाचे निरीक्षण करतात. आकृतिबंधाचा विस्तार करतात आणि निर्मिती करतात.



- 1, 2, 3, 4, 5,
- 1, 3, 5,
- 2, 4, 6,
- 1, 2, 3, 1, 2,, 1,, 3,



- चित्रे/अंक वापरून माहिती गोळा करतात. नोंद करतात आणि चित्रे पाहून सोप्या माहितीचा अर्थ लावतात. उदा. मूल बागेतील चित्रात विविध प्रकारची फुले पाहून या बागेत विशिष्ट रंगांची फुले जास्त आहेत हा तर्क/अनुमान काढतात.
- शून्य ही संकल्पना समजून घेतात.

इयत्ता दुसरी

अध्ययनार्थी -

- दोन अंकी संख्यांवर कृती करतात.
- 99 पर्यंतच्या संख्यांचे वाचन-लेखन करतात.
- दैनंदिन जीवनातील वस्तूंच्या साहाय्याने 2, 3, 4, 5 आणि 10 यांचे पाढे तयार करतात व ते वापरतात.
- दोन अंकी संख्या लिहिताना आणि तुलना करताना स्थानिक किमतीचा उपयोग करतात.
- दोन अंकांपासून तयार होणारी मोठ्यात मोठी आणि लहानात लहान संख्या तयार करतात. (दिलेल्या अंकांच्या आवृत्तीने आणि अंकांच्या आवृत्ती शिवाय)
- दोन अंकी संख्यांच्या बेरजेवर आधारित दैनंदिन जीवनातील साधने / समस्या सोडवितात.
- दोन अंकी संख्यांच्या वजाबाकीवर आधारित दैनंदिन जीवनातील साधने / समस्या सोडवितात.
- समान, तसेच वेगवेगळ्या किमतीच्या विविध नोटा-नाणी वापरून 100 रु. पर्यंतची रक्कम तयार करतात.
- त्रिमितीय आकार आणि द्विमितीय आकार यांच्या दिसून येणाऱ्या वैशिष्ट्यांचे वर्णन करतात.
- सामान्य त्रिमितीय आकार ओळखून त्यांची नावे सांगतात. उदा. घन, दंडगोल, शंकू आणि गोल.
- त्रिमितीय वस्तूंच्या द्विमितीय आकृत्या काढतात.
- द्विमितीय आकार ओळखतात. (आयत, चौरस, त्रिकोण, वर्तुळ).
- सरळ आणि वक्ररेषा वेगळ्या करतात.
- सरळ रेषा वेगवेगळ्या रूपात दाखवितात/काढतात. (उभ्या, आडव्या, तिरप्या)
- त्रिमितीय वस्तूंचे (घनाकृतींचे) तिच्या भौतिक गुणधर्मानुसार स्वतःच्या शब्दांत वर्णन करतात. उदा. चेंडू, घरंगळतो, बॉक्स घसरतो इत्यादी.
- त्रिमितीय हाताची बोटे, हाताची वीत, हात, पाऊल यांसारख्या अप्रमाणित लांबीच्या एककाने वस्तूंची लांबी मोजतात आणि अंदाज बांधतात.
- साधा वजनकाटा वापरून दोन वस्तूंची तुलना... पेक्षा जड/पेक्षा हलकी अशा रूपांत करतात.
- आठवड्यातील वारांची नावे, वर्षातील महिन्यांची नावे ओळखतात.
- मिळविलेल्या माहितीचे विश्लेषण करून अनुमान काढतात. उदा. अंजलीपेक्षा समीरच्या घरी वाहने अधिक वापरतात.
- 100 रुपयांपर्यंतच्या नाणी व नोटांच्या किमती ओळखतात आणि त्यावर बेरीज व वजाबाकी या क्रिया करतात.

इयत्ता तिसरी

अध्ययनार्थी -

- तीन अंकी संख्यांवर क्रिया करतात.
- 999 पर्यंतच्या संख्या स्थानिक किमतीचा उपयोग करून वाचतात व लिहितात.



- 999 पर्यंतच्या संख्यांच्या स्थानिक किमतीचा उपयोग करून तुलना करतात.
- 999 पेक्षा जास्त बेरीज होणार नाही अशा 3 अंकी संख्यांची बिन हातच्याची व हातच्याची बेरीज व वजाबाकी करतात.
- परिस्थिती / संदर्भ यांचे विश्लेषण करून संख्यांवरील योग्य क्रियांचा वापर करतात.
- समान गट किंवा वाटणीच्या मदतीने भागाकार क्रियेचा अर्थ स्पष्ट करतात आणि पुन्हा पुन्हा वजाबाकीच्या क्रियेद्वारे भागाकाराचा अर्थ शोधून काढतात. उदा. $12 \div 3$ म्हणजे प्रत्येकी 3 चा एक गट याप्रमाणे 12 वस्तू होण्यासाठी किती गट लागतील? किंवा 12 मधून 3 ही संख्या पुन्हापुन्हा किती वेळा वजा करता येईल?
- कमी रकमेची बेरीज व वजाबाकी हातचा घेऊन अथवा न घेता करतात.
- दरांचे तक्ते आणि साधी बिले बनवितात.
- विद्यार्थी द्विमितीय आकार समजावून घेतात.
- डॉट ग्रीड कागद वापरून, घड्या घालून तसेच कागद कात्रण करून, सरळ रेषेच्या साहाय्याने द्विमितीय आकार तयार करतात.
- कडा कोपरे आणि कर्णाच्या संख्येवरून द्विमितीय आकाराचे वर्णन करतात. उदा. पुस्तकाच्या कव्हरला चार कडा, चार कोपरे आणि दोन कर्ण आहेत.
- दिलेल्या जागेवर कुठेही जागा न सोडता दिलेल्या आकाराच्या फरशीच्या साहाय्याने जागा भरून काढतात.
- सेंमीटर व मीटर या प्रमाणित एककांच्या साहाय्याने लांबी व अंतर मोजतात किंवा अंदाज करतात आणि एककातील संबंध ओळखतात.
- वस्तूचे साध्या तराजूच्या साहाय्याने ग्रॅम व किलोग्रॅम ही प्रमाणित एकके वापरून वजन करतात. काठी, पेन्सिल इत्यादी एकाच मापाची अप्रमाणित एकके वापरून लांबी/अंतर मोजतात, तसेच अंतराचा अंदाज करतात. कप, चमचा, बादली या एकाच मापाची अप्रमाणित एकके वापरून भांडे, पिंप इत्यादींची धारकता मोजतात व त्यांच्या धारकतांचा अंदाज करतात.
- अप्रमाणित एककाच्या मदतीने विविध भांड्यांच्या धारकता/क्षमतांची तुलना करतात.
- दैनंदिन जीवनातील प्रसंग/घटनांमध्ये ग्रॅम, किलोग्रॅम यांचा समावेश असणारी बेरीज व वजाबाकी करतात.
- दिनदर्शिकेतील विशिष्ट दिवस आणि तारीख ओळखतात.
- तास, दिवस या कालावधीनुसार घटना/प्रसंगातील क्रम लावतात. उदा. मूल अधिक काळ शाळेत असते का घरी?
- भिंतीवरील/हातातील घड्याळावरून पूर्ण तासात अचूक वेळ सांगतात.
- साधे आकार आणि संख्यामालिका या प्रकारच्या आकृतिबंधांचा विस्तार करतात.
- सममितीवर आधारित भौमितिक आकृतिबंधांचे निरीक्षण करतात, जाणून घेतात व विस्तार करतात.
- ताळ्याच्या खुणांच्या साहाय्याने माहितीची नोंद करतात. चित्रांच्या साहाय्याने माहिती दर्शवितात आणि निष्कर्ष काढतात.

इयत्ता चौथी

अध्ययनार्थी -

- दैनंदिन जीवनात संख्यांवरील क्रियांचा वापर करतात.
- सम, विषम संख्यांचे वर्गीकरण करतात.
- 2 व 3 अंकी संख्यांचा गुणाकार करतात.



- विविध पद्धती वापरून एका संख्येला दुसऱ्या संख्येने भागतात. जसे- चित्ररूपाने (ठिपके काढून) समान गट करून किंवा भागाकार गुणाकार यातला संबंध वापरून पुन्हा पुन्हा वजाबाकी करून.
- नाणी, नोटा, लांबी, वस्तुमान आणि धारकता यांचा संबंध असणारे दैनंदिन जीवनातील न किंवा प्रसंग तयार करण्यासाठी व सोडवण्यासाठी चार क्रियांचा उपयोग करतात.
- अपूर्णाकाचा वापर करतात.
 - कागदाची घडी घालून वस्तूंच्या दिलेल्या समूहावरून किंवा दिलेल्या चित्रातील एका पूर्णाचा अर्धा, पाव, पाऊण भाग ओळखतात.
 - अर्धा, पाव व पाऊण भाग अनुक्रमे $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ व $\frac{3}{4}$ या चिन्हांनी दाखवितात.
 - $\frac{1}{2}$ आणि $\frac{2}{4}$, तसेच यांसारख्या इतर अपूर्णाकांची सममूल्यता दर्शवितात.
- सभोवताली आढळणारे आकार जाणून घेतात.
- वर्तुळाचे केंद्र, त्रिज्या व व्यास ओळखतात.
- टाईलिंगसाठी वापरता येतील असे आकार शोधतात.
- घडणीचा वापर करून घन व इष्टिकाचिती तयार करतात.
- साध्या वस्तू वरून, समोरून व बाजूने पाहिल्या असता कशा दिसतील त्याचे चित्र काढतात.
- दिलेल्या आकारास एकक मानून साध्या भौमितिक आकारांचे (त्रिकोण, आयत, चौरस) परिमिती व क्षेत्रफळ काढतात. उदा. टेबलाचा पष्ठभाग पूर्णपणे झाकण्यासाठी लागणाऱ्या पुस्तकांची संख्या.
- मीटरचे सेमी मध्ये आणि सेमीचे मीटर मध्ये रूपांतर करतात.
- एखाद्या वस्तूची लांबी, दोन ठिकाणांतील अंतर, विविध वस्तूंची वजने, भांड्यातील द्रवाचे आकारमान इत्यादींचा अंदाज करतात, नंतर प्रत्यक्ष मोजून पडताळा घेतात.
- लांबी, अंतर, वजन, आकारमान यांसंबंधीचे, दैनंदिन जीवनातील चार मूलभूत गणिती क्रियांचा अंतर्भाव असणारे प्रश्न सोडवितात.
- तास व मिनिटे यात घड्याळातील वेळ सांगतात. दिलेली वेळ मध्यान्हपूर्व व मध्यान्होत्तर वेळेच्या रूपात सांगतात.
- चोवीस ताशी घड्याळ व बारा ताशी घड्याळ यांतील संबंध सांगतात.
- दैनंदिन जीवनातील घटनांना लागणारा वेळ किंवा घटनांमधील कालावधी पुढे मोजून किंवा मागे मोजून, तसेच बेरीज-वजाबाकी करून गणन करतात.
- गुणाकार व भागाकारातील आकृतिबंध (9 च्या पटीपर्यंत) ओळखतात.
- चित्रालेखावरून अनुमान काढतात.

इयत्ता पाचवी

अध्ययनार्थी -

मोठ्या संख्यांवरील उदाहरणे सोडवतात.

- परिसरातील 1000 पेक्षा जास्त किमतीच्या संख्या वाचतात व लिहितात.
- 1000 पेक्षा मोठ्या संख्यांवर, स्थानिक किमती जाणून घेऊन चार मूलभूत अंकगणिती क्रिया करतात.
- प्रमाणित पद्धत वापरून दिलेल्या संख्येला दुसऱ्या संख्येने भागतात.



- बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार व भागाकार यांचे अंदाज करतात व विविध प्रकारे त्याचा पडताळा घेतात. उदाहरणार्थ, प्रमाण रीती वापरून, एखाद्या संख्येचे भाग करून (जसे- 9450 ला 25 ने भागताना; आधी 9000 ला, मग 400 ला व नंतर 50 ला 25 ने भागतात. आलेल्या भागाकारांची बेरीज करतात.)
- मूळ संख्या व सहमूळ संख्यांचे वर्गीकरण ओळखतात.

दिलेल्या अपूर्णाकांचा अर्थ जाणून घेतात.

- समूहाचा भाग दर्शविणारी संख्या शोधतात.
- दिलेल्या अपूर्णाकांचा सममूल्य अपूर्णाक शोधतात व तयार करतात.
दिलेले $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ व $\frac{1}{5}$ यांसारखे अपूर्णाक दशमान पद्धतीत व्यक्त करतात. याउलट दशमान पद्धतीतील अपूर्णाक साध्या अपूर्णाकात यक्त करतात. उदाहरणार्थ, लांबी किंवा रकमेचा अर्धा भाग. (जसे- 10 रुपयांचा अर्धा म्हणजे 5 रुपये.)
- व्यवहारी अपूर्णाकाचे दशांश अपूर्णाकात रूपांतर करतात आणि दशांश अपूर्णाकाचे रूपांतर व्यवहारी अपूर्णाकात करतात.

कोन व आकार यांबद्दलची अधिक माहिती मिळवितात.

- काटकोन, लघुकोन, विशालकोन यांचे वर्गीकरण करून कोन काढतात व त्यांचे रेखाटन करतात.
- नेहमीच्या वापरातील लांबी, वजन, धारकता यांच्या एककांचा संबंध जोडतात आणि मोठी एकेक छोट्या एककात व छोटी एकेक मोठ्या एककात रूपांतरित करतात.
- मोठ्या भांड्यांच्या आकारमानाचा अंदाज ज्ञात एककांच्या साहाय्याने करतात. जसे- बादलीचे आकारमान तांब्याच्या आकारमानाच्या 20 पट आहे.
- नाणी, नोटा, लांबी, वजन, धारकता व काल त्वधी यांच्या मापनातील उदाहरणे वा समस्या सोडविण्यासाठी चार मूलभूत अंकगणिती क्रियांचा वापर करतात.
- हेतूपूर्वक तयार केलेल्या घडणी वापरून घन, वृत्तचिती व शंकू तयार करतात.
- चौरस संख्या व त्रिकोणी संख्या यांचे आकृतिबंध ओळखतात.
- दैनंदिन व्यवहारातील विविध प्रकारची माहिती गोळा करतात. सारणीरूपात व चित्रालेखाने दर्शवितात.
- परिसरातील आयताकृती वस्तूंची परिमिती व क्षेत्रफळ काढतात. जसे- वर्गातील जमीन, खडूच्या खोक्याचा पृष्ठभाग इत्यादी.
- सुयोग्य क्रियांचा वापर करून (बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार व भागाकार) मोठ्या संख्यांवरील क्रिया करतात.

इयत्ता सहावी

अध्ययनार्थी -

- विशिष्ट परिस्थितीत ल.सा.वि., म.सा.वि. चे उपयोजन करतात.
- पूर्णाकांची बेरीज व वजाबाकीची उदाहरणे सोडवितात.
- दैनंदिन जीवनातील पैसे, लांबी, तापमान इत्यादींचा अंतर्भाव असलेल्या परिस्थितींमध्ये व्यवहारी अपूर्णाक व दशांश अपूर्णाक वापरतात. उदा. साडेसात मीटर कापड, दोन ठिकाणांतील अंतर 112.5 किमी इत्यादी.
- दैनंदिन जीवनात अपूर्णाकांचा संबंध येणाऱ्या परिस्थितीत साध्या आणि दशांश अपूर्णाकांचा वापर करतात.
- सामान्यीकरण करण्यासाठी दिलेल्या परिस्थितीत चलाचा वापर विविध क्रियांसह करतात. उदा. x एकक व 3 एकक बाजू असलेल्या आयताची परिमिती $2(x + 3)$ एकक आहे.



- विविध परिस्थितीत गुणोत्तरांचा वापर करून संख्यांची तुलना करतात. उदा. वर्गातील मुर्लीचे मुलांशी गुणोत्तर 3:2 आहे.
- विविध शाब्दिक उदाहरणे सोडविण्यासाठी एकमान पद्धत वापरतात. उदा. एक डझन वह्यांची किंमत देऊन सात वह्यांची किंमत काढावयाची असताना, प्रथम एका वहीची किंमत काढतात.
- रेषा, रेषाखंड, कोन, त्रिकोण, चौकोन, वर्तुळ, इत्यादी भौमितिक आकारांचे वर्णन भोवताली आढळणाऱ्या उदाहरणांच्या साहाय्याने करतात.
- प्रात्यक्षिकाद्वारे कोनाची समज दर्शवितात.
- भोवतालचे कोन ओळखतात, मापानुसार कोनांचे वर्गीकरण करतात, $45^{\circ} - 90^{\circ} - 180^{\circ}$ असे कोन संदर्भासाठी घेऊन कोनाच्या मापाचा अंदाज करतात.
- प्रात्यक्षिकाद्वारे रेषीय सममितीचे आकलन करतात.
- एका किंवा अधिक अक्षाभोवती सममित असणाऱ्या द्विमितीय आकारातील सममिती ओळखतात.
- द्विमितीय आकारातील सममित आकृती (2-D) तयार करतात.
- किरण, प्रतल, समांतर रेषा या मूलभूत संबोधांचे वर्णन करतात.
- एकरेषीय बिंदू ओळखतात. एकसंपात बिंदू ओळखतात.
- दिलेल्या कोनाचा दुभाजक काढतात.
- अपूर्णाकांचा गुणाकार व भागाकार करतात.
- दैनंदिन व्यवहारात लागणारा शेकडा नफा किंवा शेकडा तोटा काढतात.
- त्रिकोणाचे कोनांवरून आणि बाजूंवरून पडणारे प्रकार/गटांमध्ये वर्गीकरण करतात. उदा. विषमभुज, समद्विभुज किंवा समभुज हे बाजूंवरून पडणारे त्रिकोणाचे प्रकार इत्यादी.
- गोल, घन, इष्टिकाचिती, वृत्तचिती, शंकू, यांसारख्या परिसरात आढळणाऱ्या त्रिमितीय वस्तू ओळखतात.
- त्रिमितीय वस्तूच्या कडा, शिरोबिंदू आणि पृष्ठे यांची उदाहरणे देऊन वर्णन करतात.
- परावर्तित सममितीची संकल्पना कागदाला घड्या घालून, कागद कापून व शाईचा डाग पाडून इत्यादींच्या साहाय्याने दाखवितात. दिलेल्या/गोळा केलेल्या माहितीची मांडणी करतात. जसे की, मागील सहा महिन्यांत कुटुंबात विविध वस्तूवर झालेल्या खर्चाची मांडणी सारणी आणि चित्रालेख/स्तंभालेखाद्वारे करतात आणि अर्थनिर्वचन करतात.
- काही मूलभूत भौमितिक रचना करतात.
- बहुभुजाकृती ओळखतात.
- बँकेचे व्यवहार ओळखतात व सरळव्याज काढतात.
- चौकोनाच्या बाजू व कोन ओळखतात.
- त्रिकोणाचे काही गुणधर्म सांगतात.
- एक चलातील समीकरणाची सोपी उदाहरणे सोडवितात.
- विभाज्यतेच्या कसोट्या सांगतात.



इयत्ता सातवी

अध्ययनार्थी -

- दोन पूर्णांकांचा गुणाकार व भागाकार करतात.
- अपूर्णांकांच्या गुणाकार व भागाकाराचे अर्थनिर्वचन करतात.
- उदाहरणार्थ, $2/3 \times 4/5$ याचा अर्थ $4/5$ चा $2/3$ तसेच $1/2 \div 1/4$ याचा अर्थ किती वेळा $1/4$ म्हणजे $1/2$?
- साध्या व दशांश अपूर्णांकांचा गुणाकार व भागाकार करण्यासाठी नियम वापरतात.
- परिमेय संख्यांचा संबंध असणारे दैनंदिन जीवनातील प्रश्न सोडवितात.
- मोठ्या संख्यांचे गुणाकार, भागाकार करण्यासाठी संख्यांच्या घातांकित रूपाचा उपयोग करतात.
- दैनंदिन जीवनातील विविध परिस्थिती साध्या समीकरणांच्या रूपात मांडून समीकरणे सोडवितात.
- बैजिक राशींची बेरीज, वजाबाकी करतात.
- प्रमाणात असलेल्या आणि प्रमाणात नसलेल्या राशी (संख्या) ओळखतात. उदाहरणार्थ, $15/45$ आणि $40/120$ या संख्या समान आहेत म्हणून $15, 45, 40, 120$ या संख्या प्रमाणात आहेत असे सांगतात.
- शतमानाचे साध्या व दशांश अपूर्णांकांत रूपांतर करण्याचे न तसेच उलट प्रकारचे न सोडवितात.
- गुणधर्मांच्या आधारे रेषीय जोडी, पूरक कोन जोडी, काटकोनांची जोडी, संलग्न कोनांची जोडी आणि विरुद्ध कोनांची जोडी या जोड्यांचे वर्गीकरण करतात. प्रत्येक जोडीतील एका कोनाचे माप दिले असता, दुसऱ्या कोनाचे माप ठरवितात.
- त्रिकोणाचे दोन कोन दिले असता, तिसऱ्या कोनाचे माप शोधतात.
- चौरसाकार आणि आयताकार आकारांचे क्षेत्रफळ काढतात.
- दैनंदिन व्यवहारातील अनुभवांतून जमविलेल्या सांख्यिक माहितीवरून प्रातिनिधिक संख्या (मध्य) काढतात.
- स्तंभालेखावरून माहितीचे अर्थनिर्वचन करतात. उदाहरणार्थ, थंडीपेक्षा उन्हाळ्यामध्ये विजेचा वापर जास्त असतो, पहिल्या दहा षटकांमध्ये एखाद्या संघाने काढलेल्या धावा इत्यादी.
- त्रिकोणाचे कोनदुभाजक व त्याच्या बाजूंचे लंबदुभाजक काढतात व ते एकसंपाती असतात हे ओळखतात.
- विशिष्ट बाजू व कोन दिले असता त्रिकोण काढतात.
- कोन, रेषाखंड व वर्तुळ यांची एकरूपता ओळखतात.
- मूळ अवयव पाडून संख्यांचा ल.सा.वि. व म.सा.वि काढतात.
- त्रिकोणाचे बाह्यकोन ओळखतात.
- बहुभुजाकृतीच्या आंतरकोनांच्या बेरजेचे सूत्र तयार करतात.
- मूळ अवयव पद्धतीने संख्येचे वर्गमूळ काढतात.
- दिलेल्या माहितीवरून जोडस्तंभालेख काढतात व वाचतात.
- भागीदारीचे व्यवहार करताना प्रमाणाचा उपयोग करतात.
- वर्तुळाच्या परिघाचे सूत्र काढतात व त्याचा उपयोग करतात.
- वर्तुळाचा लघुकंस, विशालकंस ओळखतात व कंसातील कोनाचे माप ठरवितात.



- त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ सूत्र तयार करतात.
- घन व इष्टिकाचितीचे पृष्ठफळ काढतात.
- पायथागोरसच्या सिद्धांताचा उपयोग करून काटकोन त्रिकोणाची बाजू काढतात.
- वर्ग विस्ताराचे सूत्र वापरतात.
- द्विपदीचे वर्ग करतात.
- द्विपदीचे अवयव पाडतात.

इयत्ता आठवी

अध्ययनार्थी -

- आकृतिबंधाद्वारे परिमेय संख्यांची बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार आणि भागाकार यांच्या गुणधर्मांचे सामान्यीकरण करतात.
- दिलेल्या दोन परिमेय संख्यांमधील जास्तीत जास्त परिमेय संख्या शोधून काढतात.
- विविध पद्धतीने वर्ग, घन, वर्गमूळ व घनमूळ काढतात.
- पूर्णांक घातांकाची उदाहरणे सोडवितात.
- चलाचा वापर करून कोडी व दैनंदिन जीवनातील उदाहरणे सोडवितात.
- बैजिक राशींचा गुणाकार करतात.
- उदा. $(2x + 5)(3x^2 + 7)$ चा विस्तार करतात.
- दैनंदिन जीवनातील समस्या सोडविण्यासाठी बैजिक नित्यसमानतांचा वापर करतात.
- सूट आणि चक्रवाढ व्याजावरील उदाहरणात, नफा अथवा तोटा काढण्यासाठी शेकडेवारीच्या संकल्पनांचा उपयोग करतात.
- छापील किंमत व प्रत्यक्ष सूट दिलेली असता शेकडा सूट काढतात किंवा विक्री किंमत आणि नफा दिला असता शेकडा नफा काढतात.
- सम चलन आणि व्यस्त चलन यांवर आधारित उदाहरणे सोडवितात.
- चौकोनाच्या कोनांच्या मापांवरील बेरजेचा गुणधर्म वापरून उदाहरणे सोडवितात.
- समांतरभुज चौकोनाचे गुणधर्म पडताळून पाहतात आणि त्यांच्यातील संबंध कारणे देऊन स्पष्ट करतात.
- कंपास आणि पट्टीच्या साहाय्याने विविध चौकोनांच्या रचना करतात.
- आकृतिबंधाच्या साहाय्याने ऑयलरच्या सूत्राचा पडताळा घेतात.
- चौकटीचा कागद किंवा आलेख कागद यांचा वापर करून बहुभुजाकृती आणि समलंब चौकोन यांचे अंदाजे क्षेत्रफळ काढतात आणि सूत्राचा वापर करून पडताळा घेतात.
- बहुभुजाकृतीचे क्षेत्रफळ काढतात.
- इष्टिकाचिती व वृत्तचिती आकाराच्या वस्तूंचे पृष्ठफळ व घनफळ काढतात.
- स्तंभालेखाचे वाचन करतात व अर्थनिर्वचन करतात.
- दोन समांतर रेषांच्या छेदिकेमुळे तयार होणाऱ्या कोनांच्या जोड्यांचे गुणधर्म पडताळून पाहतात.
- बाबाबा, बाकोबा, कोबाको, कर्णभुजा या कसोट्या वापरून त्रिकोणांची एकरूपता स्पष्ट करतात.



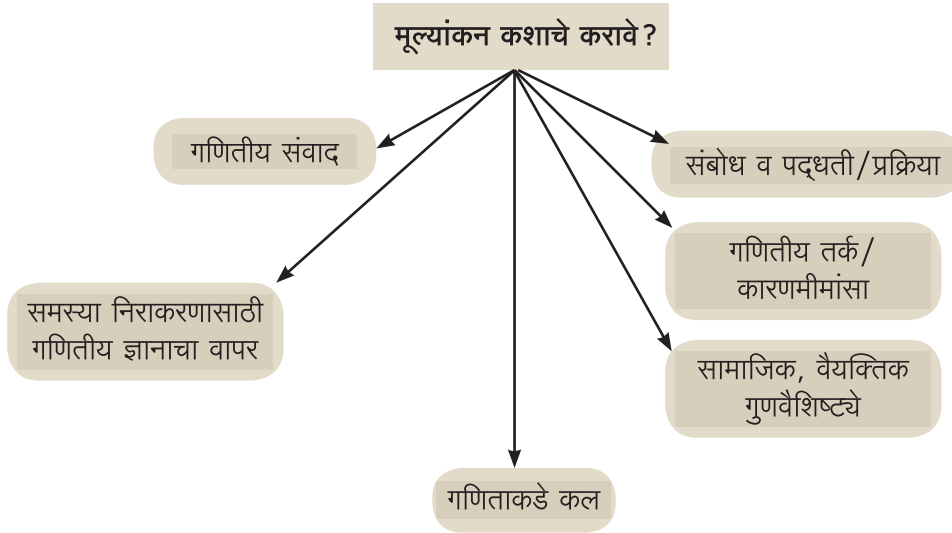
- आलेख कागद किंवा चौकटीचा कागद वापरत बंदिस्त आकृतीचे अंदाजे क्षेत्रफळ काढतात.
- दैनंदिन व्यवहारातील सांख्यिक माहितीवरून मध्य काढतात.
- दिलेल्या रेषेला समांतर रेषा काढण्याची रचना करतात.

प्राथमिक स्तरावर गणिताचे मूल्यांकन :

मूल कसे अध्ययन करते या महत्त्वाच्या प्रश्नावर लक्ष केंद्रीत करून प्राथमिक स्तरावर गणिताचे मूल्यांकन व्हायला हवे. त्यामध्ये खालील बाबींचे मूल्यांकन व्हायला हवे.

- मुले गणिताचे अध्ययन कशा प्रकारे करतात याचे आकलन.
- गणिती संकल्पना विकसित करून त्यांचे दैनंदिन जीवनात उपयोजन.
- विद्यार्थ्यांच्या सामाजिक व वैयक्तिक गुणवैशिष्ट्यांचा विकास.

गणिताचे मूल्यांकन व्यापकपणे कोणत्या बाबींद्वारे करायचे ते खालील आकृतीच्या आधारे अभ्यासू या.



प्राथमिक स्तरावर गणित शिकविताना नेहमी विचारला जाणारा प्रश्न -

गणित अध्ययना संदर्भात कशाचे मूल्यांकन करावे ?

स्वतःला हा प्रश्न विचारा की, असे काय आहे जे तुम्ही गणिताच्या मूल्यांकनाद्वारे शोधत आहात? जेथे गणित अध्ययन निगडीत आहे, तेथे जर शालेय गणिताकडे व्यापक दृष्टिकोनातून पाहिले तर, 'जेव्हा विद्यार्थी गणिताला असा विषय मानतील की ज्याबाबत त्यांना बोलता येते, संभाषण करता येते, संवाद साधता येतो, चर्चा करता येते, एकत्रितपणे कार्य करता येते' तेव्हा यांवर सर्वांचे एकमत होईल की अशा विद्यार्थ्यांला गणित नक्कीच समजले आहे म्हणून गणिताचे मूल्यांकन करताना खालील क्षमतांचे मूल्यांकन करावे.

विद्यार्थी खालील बाबतीत सक्षम आहेत का ?

- गणितीय तथ्य, आकृती इत्यादींचे एकत्रीकरण करून स्पष्टीकरण देण्यात, कारणे जाणून घेण्यात, निष्कर्ष काढण्यात सक्षम आहे का ?
- सहसंबंधाचे, रचनेचे आकलन होण्याकरिता अमूर्त विचारांचा वापर करतात का ? विधानांची सत्य-असत्यता पडताळण्यासाठी तार्किक युक्तिवाद करतात का ?
- गणितीच्या विविध शाखांतील मूलभूत संरचनांचे आकलन आहे का ? उदा. अंकगणित, बीजगणित, भूमिती, माहिती व्यवस्थापन, महत्त्वमापन इ.
- अमूर्तीकरण व सामान्यीकरण करण्याचे विविध मार्ग व त्यासंबंधी विविध मार्गांशी परिचित आहेत का ?



- अभ्यासलेल्या गणितीय संकल्पना दैनंदिन व्यवहारात वापरून समस्या निराकरण करण्यास सक्षम आहेत का ?
- गटकार्य करताना सहयोग देऊन परस्परांना मदत करण्यास सक्षम आहे काय ?

शालेय आधारित मूल्यांकन या घटकसंचामध्ये दिलेल्या विविध साधने व तंत्रांचे दैनंदिन अध्ययन-अध्यापन प्रक्रियमध्ये एकात्मीकरण करता येईल. या घटकसंचामध्ये दिलेल्या विविध साधनांचा विवेकपूर्ण उपयोग केला पाहिजे.

प्राथमिक स्तरावर गणित अध्ययन-अध्यापन प्रक्रियेतून विद्यार्थ्यांमध्ये अध्ययन निष्पत्तीनुसार दिलेल्या अपेक्षित क्षमता साध्य करण्यासाठी खाली काही नमुना उदाहरणे दिलेली आहेत.

नमुना उदाहरण 1 :

ही कृती शाळापूर्व शेवटच्या वर्षात किंवा इयत्ता पहिलीत सुरुवातीला घेण्यात यावी.

अध्ययन निष्पत्ती :

1 ते 9 वस्तूंच्या समूहासाठी संख्यानामे वापरतात.

कृतीचे उद्दिष्ट :

मूल हे करू शकेल -

- वस्तूंचा समूह दाखविल्यावर त्यात किती वस्तू आहेत, त्याचे 'संख्यानाम' सांगतात.
- 1 ते 10 पर्यंत क्रमवार संख्यानामे तयार करतात.

लागणारे साहित्य :

गोष्ट/कविता सादरीकरणाकरिता आवश्यक पूरक साहित्य, दृक्श्राव्य साधने.

रीत :

सामान्यपणे विद्यार्थी वर्गात येण्याआधीच संख्यांची ओळख झालेली असते.

उदाहरणार्थ - त्यांनी त्यांच्या घरात किंवा आसपास अनेक लोकांना संख्यानामांचा उपयोग करताना ऐकलेले असते.

जसे - मला अजून एक बिस्किट हवे.

- मला पाच रुपये दे.

- आम्ही दोन दिवसांनंतर आजीकडे जाणार.

- काही विद्यार्थ्यांना संख्यानामे आधीच (यादृच्छिक व क्रमशः) माहीत असतात. या कृतीची -

- विद्यार्थ्यांना संख्यानाम व मोजसंख्या नामांशी परिचय होणे, क्रमवार संख्यानामे सांगणे, यासाठी मुलांच्या संदर्भाचा प्रामुख्याने सहसंबंध जोडणे ही उद्दिष्टे आहेत.

- विद्यार्थ्यांना संख्यानामे क्रमवार समजून देण्यासाठी कवितांचा (ज्या इयत्ता पहिलीसाठी उपयुक्त असतील), गाण्यांचा, खेळ किंवा गोष्टी इत्यादी (ज्यात संख्यानामे क्रमवार व यादृच्छिक असतील) या माध्यमातून संख्यानामे विद्यार्थ्यांच्या सहज लक्षात राहतील.
- तशी एक कविता खाली दिली आहे. शिक्षक अशा अनेक कविता आपल्या स्थानिक भाषेत मिळवू शकतील किंवा नव्याने तयार करू शकतील.

एक एक एक,

बाळ छोटे एक,

खा चपाती एक.



अशा वस्तू दाखवाव्यात की, ज्या 1 च्या संख्येत आहेत -

जसे - (नाक, आकाशात सूर्य इत्यादी व मुलांना शरीराचे ते भाग व वस्तू हाताने स्पर्श करण्यास व दाखविण्यास सांगा ज्या 1 च्या संख्येत आहेत.)

दोन दोन दोन

मुले छोटी दोन

सायकलची चाके दोन

(ज्या 2 च्या संख्येत आहेत अशा वस्तू दाखवित जा. जसे - डोळे, सायकलचे चाक इ. व मुलांना शरीराचे ते भाग स्पर्श करण्यास किंवा दाखविण्यास सांग जे 2 च्या संख्येत आहेत.)

तीन तीन तीन

पोपट हिरवे तीन

चार चार चार

पिल्ले छान चार

पाच पाच पाच

मधमाश्या तेथे पाच

(अशा प्रकारे कविता गात गात व वस्तूंच्या समूहापर्यंत चालू ठेवणे.)

वर्गातील अशा मुलांना संधी द्या जे सहभागी होण्यात संकोच करतात.

विभिन्न क्षमता असलेल्या मुलांना त्यांच्या क्षमतेनुसार उदाहरण देण्यासाठी उद्युक्त करा.

नमुना उदाहरण 2

प्राथमिक शाळेतील मुलांना कोनाची संकल्पना कठीण जाते. कठीण का जाते? त्याचे कारण असे की शिक्षक संकल्पना समजण्यासाठी विद्यार्थ्यांना मदत करतात. पाठ्यपुस्तकात दिलेली कोनाची गणितीय शब्दावली वापरून केलेली व्याख्या सांगण्याऐवजी दैनंदिन जीवनात व परिसरात दिसणाऱ्या स्थितीचा उपयोग केला पाहिजे.

जसे - रस्ते जेथे छेदतात अशा चौकात, कात्रीत, घड्याळाच्या दोन काट्यांत.

- टेबलाचे कोपरे, काडेपेटीचे कोपरे इत्यादी.
- हाता-पायांतून वाकताना.
- मुलांसाठी असलेल्या बागेतील घसरगुंडी पाहताना.
- रॅम्प, छत, पर्वत, रेल्वे सिग्नल, रस्त्यावरील उतार.
- दरवाजा उघडझाप करताना, वाहनांचे वाईपर, छतावरील पंखा, सायकलच्या चाकातील आरी इत्यादी.

ही सर्व उदाहरणे कोनाची संकल्पना व्यवस्थितपणे समजण्यासाठी उपयोगी पडतात. सुरुवातीच्या इयत्तांमध्ये भूमितीत कोनाची संकल्पना समजणे महत्त्वाचे आहे. या नमुना उदाहरणातून कोनाचा अर्थ व संकल्पना समजण्यासाठी मुलांना मदत होते. त्यातूनच मुलांना कोनांचे प्रकार जसे -

लघुकोन, काटकोन, विशालकोन कळतात. कोनांचे या प्रकारात वर्गीकरण करता येते. तसेच कोनासंबंधी मुलांचे मूल्यांकन कसे करावे यासंबंधी माहिती मिळते.



मुख्य संकल्पना :

कोन, कोनाचे माप, कोनाचे प्रकार, कोनांची तुलना

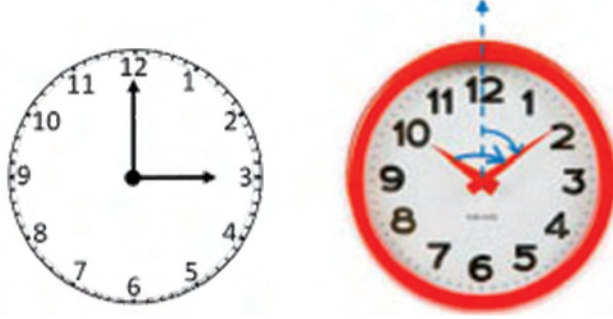
अध्ययन निष्पत्ती :

- कोन या संकल्पनेचे शोधण.
- कोनांचे वर्गीकरण (लघुकोन, काटकोन, विशालकोन) करणे.

वरील अध्ययन निष्पत्ती प्राप्त करण्यासाठी मुलांचे गट करावेत. त्यात मुले व मुलींची संख्या समान असावी. त्यांना खालील गटकार्य द्यावे.

कृती 1 :

मुलांना घड्याळातील वेगवेगळ्या वेळी काट्यांचे निरीक्षण करण्यास सांगावे व दोन काट्यांमधील स्थितीत काय फरक पडला? त्याचे वर्णन करण्यास सांगावे.



- घड्याळ असे घ्या की त्याचे काटे, संख्या इत्यादी हाताने स्पर्श करून पाहता येईल.
- मुलांना काट्यांमध्ये झालेला कोन व काट्यांच्या स्थितीत बदल झाल्याने कोन कसे बदलत जातात त्याचे निरीक्षण करण्यास सांगावे. नंतर वर्णन करण्यास सांगावे. घड्याळाचे चित्र दाखवून कोन व कोनाचे माप यांत कोणता संबंध आहे हे विचारावे.
- या कृतीमध्ये 12 विद्यार्थ्यांना वर्तुळाकार उभे करावे व प्रत्येक विद्यार्थ्यांच्या हातात 1 ते 12 पैकीच्या संख्या लिहिलेली कार्डे द्यावीत.
- वर्तुळाचे 'केंद्र' निश्चित करावे.
- घड्याळाचे काटे तयार करण्यासाठी केंद्रातून विद्यार्थ्यांच्या दिशेत जाणाऱ्या दोन रांगा कराव्यात व त्या दोन रांगांतील कोन पाहण्यास सांगावे.
- केंद्रातील विद्यार्थी व वर्तुळाजवळचा रांगेतील विद्यार्थी आपल्या हातात कोणत्या संख्येचे कार्ड आहे हे सांगतील.
- दोन रांगांमधील कोन बदलण्यासाठी एका रांगेतील विद्यार्थी किंवा दोन्ही रांगेतील विद्यार्थ्यांची स्थिती बदलून घ्या.
- दिव्यांग विद्यार्थी वर्तुळावर किंवा घड्याळाचे काटे दर्शविणाऱ्या रांगेत उभे राहू शकतात.



कृती 2 :

अध्ययनार्थीस कात्री, कंपास, विभाजक इत्यादींचे निरीक्षण करण्यास सांगावे व कोन कसा तयार होतो त्याचे वर्णन करण्यास सांगावे.



कृती 3 :

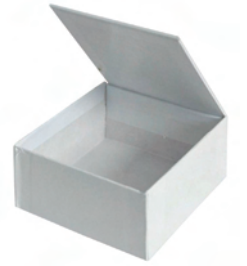
दार उघडताना किंवा बंद करताना कोन कोठे तयार होतो व कसा तयार होतो याचे वर्णन अध्ययनार्थीस करण्यास सांगावे.

प्रत्येक वेळी विद्यार्थ्यांना वस्तू हाताळण्यास द्यावी आणि कोणत्या बिंदूपाशी कोन तयार झाला हे दाखविण्यास सांगावे.

कृती 4 :

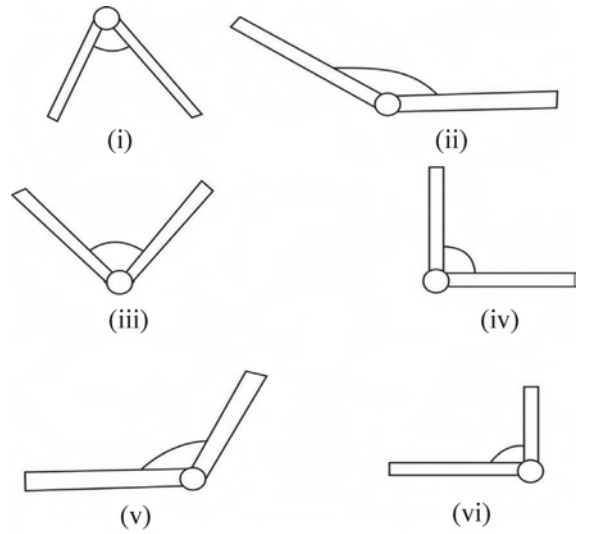
प्रत्येक वेळेस बॉक्सचे झाकण उघडताना व बंद करताना कोन कोठे व कसा तयार होतो याचे निरीक्षण करून त्याचे वर्णन करण्यास सांगावे. शिक्षकांनी या कृतीच्या माध्यमातून कोनाची संकल्पना तयार करावी. जसे - सामाईक अंत्यबिंदू असणाऱ्या दोन किरणांनी जी आकृती तयार होते त्यास कोन म्हणतात.

दोन किरणांना **कोनांच्या भुजा** व सामाईक अंत्यबिंदूला **कोनाचा शिरोबिंदू** म्हणतात.



कृती 5 :

- मुलांना लाकडी/प्लास्टिक/झाडूच्या काड्या व रबर ट्युबचे समान लांबीचे तुकडे घ्यायला सांगा.
- दोन-दोन काड्यांची जोडी घेऊन रबर ट्युबचा तुकडा जोडून शेजारी दाखविल्याप्रमाणे कोनाची प्रतिकृती तयार करण्यास सांगा. कोन दाखविण्यासाठी कात्री व कंपासपेटीतील विभाजक सुद्धा वापरता येईल. **कात्री व विभाजक हाताळताना काळजी घ्या.**
- मुलांना दोन काड्यांमधील अंतर व झालेल्या कोनाचे निरीक्षण करण्यास सांगावे. (प्रत्येक वेळेस दोन-दोन कोन घ्यावेत.)
- त्यांची निरीक्षणे अशी नोंदवा. (i) व (ii), (ii) व (iii), (iii) व (iv), (iv) व (v), (v) व (vi) मध्ये 'दोन काड्यांमधील अंतर जास्त' व 'दोन काड्यांमधील अंतर कमी' म्हणजेच भूमितीच्या / गणिताच्या भाषेत

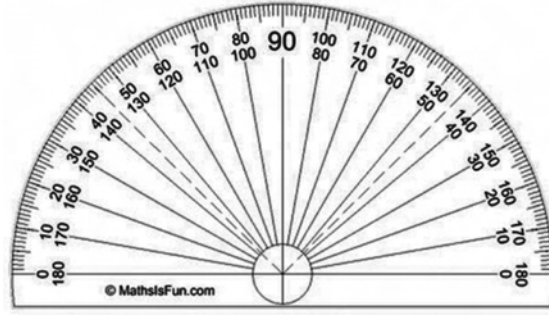


‘कोणता कोन मोठा?’ व ‘कोणता कोन लहान?’ हे निश्चित करण्यास सांगा.

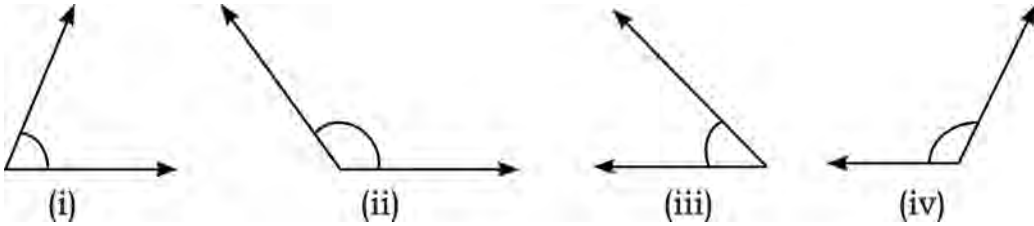
- त्यांच्या निरीक्षणातूनच ते सांगतील की, (i) व (iii) किंवा (ii) व (v) किंवा (iv) व (vi) मध्ये मोठा कोन व लहान कोन सांगणे अवघड आहे.
- या कृतीतून मुलांना वेगवेगळे कोन मोजण्याची गरज जाणवेल.
- या कृतीत दृष्टिदोष असणारी मुलेही सहभागी होऊ शकतात.

कृती 6 :

कंपासपेटीतून ‘कोनमापक’ काढून मुलांना दाखवा. कोनमापकावरील रेषा व संख्या उठावदार (embossed) केल्यास बोट फिरविताना हाताला जाणवतात. सर्वांना कोनमापकाच्या कडेवर बोट फिरविण्यास सांगा म्हणजे तो अर्धवर्तुळाकार आहे हे कळेल.



- कोनमापकाच्या कडेला दोन्ही बाजूने दोन प्रकारे लिहिलेले प्रमाण / माप वाचायला सांगा. जसे 0° ते 180° व 180° ते 0° .
- कोन अंशात मोजतात हे सांगा व चिन्ह वापरून असे दर्शवितात. तसेच कोनमापकाने कोन कसा मोजायचा याचे दिग्दर्शन करा.
- मुलांना दिलेले कोन मोजायला सांगा किंवा कोन काढून मोजायला सांगा. आधीच्या कृती 5 मध्ये तयार केलेले काड्यांचे कोन सुद्धा कोनमापकाने मोजायला सांगू शकता.
- वरील आकृतीत दिल्याप्रमाणे कोन मोजण्यास सांगा आणि त्यांनाच अनुभव घेऊ द्या की कोनमापकावर 0° ते 180° व 180° ते 0° असे दोन्ही बाजूने ‘अंकन’ का करतात ?



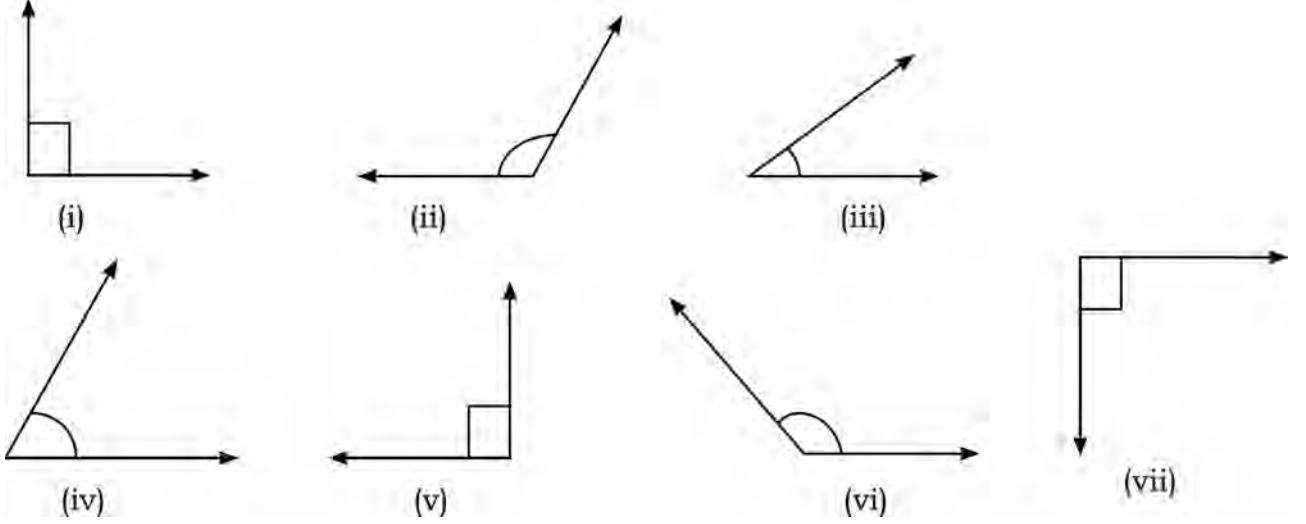
कृती 7 :

- मुलांना पुस्तक, वही, वर्ग, घर, इत्यादींचे कोपरे पाहायला सांगा. हे कोन, कोनमापकाने मोजता येतील काय? तसेच परिसरातील कोन ओळखून ते कसे मोजायचे यावर चर्चा घडवून आणावी.
- त्यांना वेगवेगळे कोन मोजायला लावा व त्याचे माप वहीत नोंदवायला सांगा.
- ‘काटकोन’ हा शब्द व त्याचे माप 90° आहे असे नमूद करा.



कृती 8 :

- विद्यार्थ्यांचे गट तयार करा. प्रत्येक गटात मुले व मुली असायला हवेत.
- खालीलप्रमाणे कागदावर काढलेले कोन द्यावेत किंवा कोनांचे कटआऊट दिले तरी चालतील.

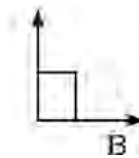
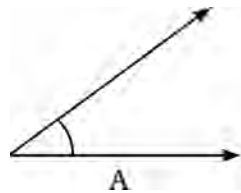


- प्रत्येक गटाला कोन मोजून माप नोंदविण्यास सांगावे.
- कोनांच्या मापावरून व ते कोन प्रत्यक्ष पाहून त्यांना समजेल की, आकृती (i), (v) व (vii) मध्ये काटकोन आहे.
- त्यानंतर इतर कोनांच्या मापावरून त्यांच्या लक्षात येईल की, आकृती (iii) व (iv) मधील कोनांचे माप 90° अंशापेक्षा कमी परंतु अंशापेक्षा जास्त आहे. तसेच आकृती (i) व (iv) मध्ये कोनांचे माप 90° पेक्षा जास्त म्हणजे काटकोनापेक्षा जास्त व 180° अंशापेक्षा कमी आहे.
- मुलांना सांगा की (iii) व (iv) मधील कोनांना 'लघुकोन' तर (ii) व (vi) मधील कोनांना 'विशालकोन' म्हणतात.
(टीप : इयत्ता सहावी NCERT गणित पाठ्यपुस्तकात दिल्याप्रमाणे हातांनी स्वतः तयार केलेला पेपरचा कोनमापक सुद्धा वापरता येईल.)
- 'गणित पेटी' व 'लॅब मॅन्युअल' वर्ग I ते VIII (NCERT, New Delhi) ही पुस्तके वाचून त्यातील कृती करू शकता.
- 'दृष्टिदोष असलेल्या विद्यार्थ्यांसाठी खास वेगळ्या प्रकारची पट्टी (Scale), कंपास व कोनमापके असतात. त्यांनाही वर दिलेल्या कृतीत सहभागी करता येईल.

मूल्यांकन - चुकीच्या संकल्पना/संबोध व पूरक साहित्य :

कोनांची तुलना :

- विद्यार्थी खाली दिलेल्या दोन कोनांची तुलना करतो.



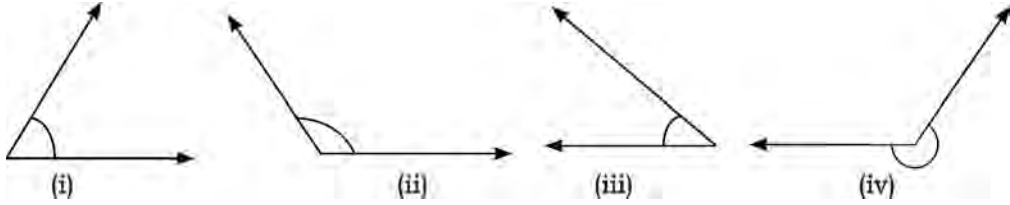
- काही विद्यार्थी सांगतील की, कोन A हा कोन B पेक्षा मोठा आहे. कारण कोन A च्या भुजा कोन B पेक्षा लांब आहे. असे उत्तर आल्यास शिक्षकाने सांगावे की, 'कोनाचे माप त्यांच्या भुजांच्या लांबीवरून ठरत नाही तर दोन भुजांमधील अंशात्मक अंतरावरून ठरते.
- त्याचप्रमाणे खाली दिल्याप्रमाणे मुलांना कोनांची तुलना करण्यास सांगा.



- काही मुले सांगतील कोन Q मोठा आहे कोन P पेक्षा. कारण की Q मधील कंस मोठा आहे. तर P मधील कसे लहान आहे. येथे शिक्षकाने परत स्पष्ट करावे की, कोनांची तुलना कंसाच्या लांबीवरून होत नाही.

कोन मोजणे :

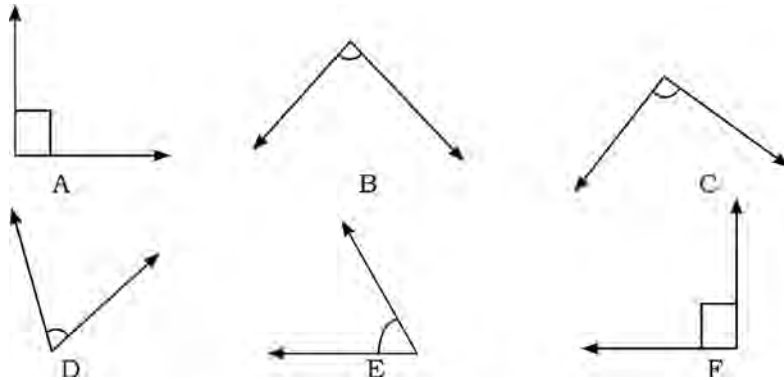
- खालील कोन मोजण्यास सांगा.



- काही विद्यार्थी आकृती (iii) मधील कोन 30° न मोजता, 150° चा कोन मोजतील. काही विद्यार्थी आकृती (iv) मधील कोन 120° ऐवजी 60° चा कोन मोजतील. असे झाल्यास त्यांना त्यांची चूक लक्षात आणून द्यावी व कोनमापकातील संदर्भरेषा आणि 0° कसा वापरावा ते परत सांगावे.
- काही विद्यार्थी कोनमापकाची कडा, कोनाच्या भुजेवर ठेवून कोन मोजतील. त्यांना कोनमापकातील कडा नाही तर संदर्भरेषा ($0^\circ - 180^\circ$ व $180^\circ - 0^\circ$ रेषा सामावणारी) व कोनमापकाचे केंद्र अनुक्रमे कोनांच्या भुजेवर व कोनाच्या शिरोबिंदूवर ठेवून कोनाचे अचूक मापन करायला शिकवावे. या कृतीत कोनमापक कसा ठेवायचा? दिलेल्या कोनाच्या भुजा गरजेनुसार पेन्सिलीने वाढवून घेण्यास सांगावे इत्यादी.

काटकोन :

- दिलेल्या आकृतीत कोनमापकाचा वापर करून काटकोन शोधा.



- कोन A व कोन F हे चिन्ह दाखविल्यामुळे कोनमापकाने मोजण्याची गरज नाही.
- कोन C 90° चा आहे की नाही ते चिन्हाने दाखविलेले नाही म्हणून हा कोन कोनमापकाने मोजून ठरवावा.
- काही विद्यार्थी कोन A काटकोन आहे असे सांगतील. पण इथे कोन A, F व C हे तीनही काटकोन आहेत व बाकीचे काटकोन नाहीत. याचा अर्थ असा की विद्यार्थी कोन F व C हे काटकोन असून सुद्धा ओळखू शकत नाही. त्याचे कारण हेही असू शकते की त्यांना काटकोन नेहमी एकाच स्थितीमध्ये किंवा एकाच प्रकारचा नमुना दाखविला गेला असावा. वेगवेगळ्या स्थितीतील काटकोनही असतात हे दाखवायला हवे व सांगायला हवे तसे अनुभव दिले तर अचूकता येते. असेच प्रत्येक कोनाच्या बाबतीत करावे लागेल.

उच्च प्राथमिक स्तर :

नमुना उदाहरण 3

अध्ययन निष्पत्ती :

- उदाहरणात आपण 'अपूर्णाकांचा भागाकार' या संकल्पनेवर चर्चा करू या. यात (i) पूर्णांक ÷ अपूर्णांक व (ii) अपूर्णांक ÷ अपूर्णांक याचा विचार करू या.

पूर्णांक संख्येला अपूर्णांक संख्येने भागणे :

खाली दिलेल्या परिस्थितीत आपण उकल कशी शोधाल ?

समजा 2 लाडू आहेत. प्रत्येक लाडूचा $\frac{1}{2}$ केला. एका विद्यार्थ्याला $\frac{1}{2}$ लाडू दिल्यास एकूण किती विद्यार्थ्यांना लाडू देता येईल ?
पुरेशा चर्चेनंतर विद्यार्थी या निर्णयापर्यंत पोहोचतील की, 2 लाडूंचे $\frac{1}{2}$ भाग केले व वाटले म्हणजे येथे $2 \div \frac{1}{2}$ करायचे आहे. नंतर ते म्हणतील की असे 4 भाग झाले.

∴ $2 \div \frac{1}{2} = 4$ म्हणजे 4 विद्यार्थ्यांना प्रत्येकी अर्धा लाडू मिळेल. ही चर्चा पुढे नेत..... विचारावे.

समजा 2 लाडूचे प्रत्येकी समान तीन भाग म्हणजे $\frac{1}{3}$ भाग केले तर प्रत्येकी $\frac{1}{3}$ लाडू प्रमाणे किती जणांना वाटता येतील ?

थोड्याशा चर्चेनंतर $2 \div \frac{1}{3} = 6$ असे उत्तर देतील. तसेच $2 \div \frac{1}{4} = 8$

ही सर्व उदाहरणे उत्तरासह त्यांना निरीक्षण करायला लावा.

$(2 \div \frac{1}{2} = 4, 2 \div \frac{1}{3} = 6, 2 \div \frac{1}{4} = 8)$ याप्रमाणे या भागाकारातील संख्यांमधील संबंध/आकृतिबंध लक्षात घ्यायला सांगावा आणि पुढील प्रश्न विचारावा.

जसे $3 \div \frac{1}{4} = ?$ $2 \left(\frac{1}{2}\right) \div \frac{1}{3} = ?$

विद्यार्थी यांवरून निरीक्षण करून उदाहरणातील गणिताची रीत शोधतील.

शाब्दिक उदाहरण :

एका शाळेत इयत्ता सातवीच्या 5 तुकड्या आहेत. विद्यार्थ्यांना क्षेत्रभेटीसाठी जायचे असल्याने प्रत्येक वर्ग शिक्षकांना त्यांच्या तुकडीचे विद्यार्थ्यांना $\frac{5}{6}$ भाग करण्यास सांगितले. एका भागासाठी एक बस, तर अशा किती बस लागतील.

उकल :

लागणाऱ्या एकूण बस = 5 तुकड्यांचे प्रत्येक $\frac{5}{6}$ याप्रमाणे झालेले एकूण भाग
= $5 \div \frac{5}{6} = 5 \times \frac{6}{5} = 6$



म्हणून क्षेत्रभेटीसाठी एकूण 6 बस लागतील.

नमुना उदाहरण 4

अध्ययन निष्पत्ती

विद्यार्थी पूर्णांक संख्यांचा गुणाकार करतो.

विद्यार्थ्याला पूर्णांक व अपूर्णाकांची बेरीज वजाबाकी माहित आहे. त्याला पूर्णाकांचा गुणाकार शिकवायचा आहे. यासाठी विद्यार्थ्याला काही कृती करायला द्या. त्यातून त्याला पूर्णाकांच्या गुणाकाराची पद्धत कळेल.

विद्यार्थ्यास संख्येचा आकृतिबंध (pattern of numbers) माहित आहे. त्यामुळे अशा कृतींचा विचार करूया ज्यामध्ये संख्येचा आकृतिबंध आणि काही गणिती संकल्पना ज्या विद्यार्थ्यांना माहित आहेत त्याचा उपयोग करू या.

गुणाकाराचा प्रथम प्रकार धन पूर्णांक \times ऋण पूर्णांक = ऋण पूर्णांक.

कृती 1

उदा. $2 \times (-3)$ घेऊ या.

विद्यार्थी प्राथमिक शाळेत नैसर्गिक संख्यांचा गुणाकार शिकले आहेत. तेव्हा त्यांना बेरजेच्या संकल्पनेवरून गुणाकार शिकविला होता. उदा. 2×3 म्हणजे 3 दोन वेळा घेऊन बेरीज करणे $3 + 3 = 6$. विद्यार्थ्यांना हे आठवायला सांगावे.... आणखी काही उदाहरणे सांगावीत. जसे $\rightarrow 5 \times 4, 6 \times 8$ इत्यादी.

हीच पद्धत वापरून $2 \times (-5)$ करता येईल का? त्यांना पूर्णाकांची बेरीज येते. पुरेशा चर्चेनंतर त्यांचे $2 \times (-8) = (-3) + (-3) = -6$ असे एक मत होईल.

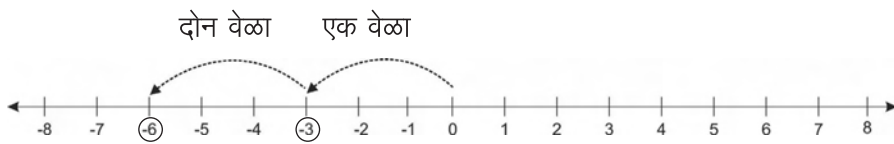
या चर्चेनंतर त्यांना प्राथमिक वर्गात शिकलेले गुणाकार आठवायला सांगा. त्यामध्ये गुणाकार कसा करायचा? यावर भर द्यावा. अशीच आणखी काही उदाहरणे देऊन उत्तर काढण्यास सांगावे.

हा गुणाकार अजून एका पद्धतीने करता येईल ते खालील कृतीत दिले आहे.

कृती 2

(-3) दोन वेळा घेऊन बेरीज करणे. यासाठी संख्यारेषा वापरावी.

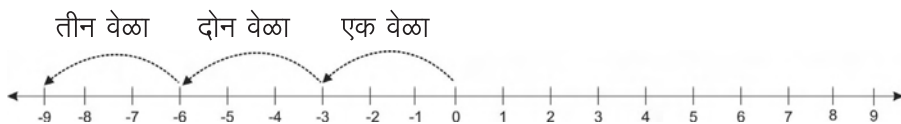
2×-3 किंवा -3×2 करू या.



$3 - 3$ च्या 2 उड्या ऋण दिशेत आहेत.

$$(-3) + (-3) = -6$$

$$-3 \times 3$$



$$(-3) + (-3) = -6 \text{ म्हणजे तीन तीन च्या 3 उड्या ऋण दिशेत म्हणजे } (-9)$$

अशा प्रकारे दृश्य रूपात बेरीज दाखविल्याने त्यांच्यात रुची निर्माण होईल, सहभागी होतील आणि गुणाकार करतील शिवाय आलेल्या गुणाकारातील **चिन्हांचा अर्थही** समजून घेतील.

विद्यार्थ्यांना अशाप्रकारे अर्थ लावून निष्कर्ष काढण्यासाठी प्रोत्साहित करावे.

अशीच विविध उदाहरणे सोडवून घ्यावीत.

कृती 3

आकृतिबंध वापरून निरीक्षण करून समान उत्तर मिळते याचा अनुभव घ्या.

-3×2 चे उत्तर मिळविण्यासाठी आपण 3×2 ने सुरु करत

$$3 \times 2 = 6 \text{(I)}$$

$$2 \times 2 = 4 \text{ (6 - 4).....(II)}$$

$$1 \times 2 = 2 \text{ (4 - 2).....(III)}$$

$$0 \times 2 = 2 \text{ (2 - 2).....(IV)}$$

$$-1 \times 2 = ?$$

वरील आकृतिबंधात मिळालेली उत्तरे 6, 4, 2, 0 अशी आहेत. पायरी (II) मध्ये 3 च्या ऐवजी 2 घेतले तर गुणाकार 2 ने घटला, 2 चा 1 केला तर गुणाकार 2 नेच घटला..... प्रत्येक पुढच्या पायरीत गुणाकार 2 ने कमी होतो तेच पुढे एक-एकने कमी करणे चालू ठेवले तर पुढील तर्कसंगत गुणाकार मिळतात. जसे -

$$-1 \times 2 = 0 - 2 = -2$$

$$-2 \times 2 = (-2) - 2 = -4$$

$$-3 \times 2 = (-4) - 2 = -6$$

त्यामुळे $(-3) \times 2 = -6$ मिळाले. अशीच आणखी उदाहरणे द्यावीत.

आता ऋण पूर्णांक \times ऋण पूर्णांक = धन पूर्णांक पाहू या.

येथे सुद्धा आधीच्या उदाहरणात वापरलेला आकृतिबंध उपयोगी पडेल का? चर्चा करा. $(-3) \times (-2) =$ किती?

कृती 4 : चला कृती करू या.

$$(-3) \times 3 = -9 \text{(I)} \rightarrow \text{या अगोदरच्या कृतीतून}$$

विद्यार्थ्यांना हे माहीत आहे.

$$(-3) \times 2 = -6 \text{(II)}$$

$$(-3) \times 1 = -3 \text{(III)}$$

$$(-3) \times 0 = 0 \text{(IV)}$$

वरील उदाहरणातील गुणाकाराचा आकृतिबंध विद्यार्थ्यांच्या लक्षात आणून द्या. यातून विद्यार्थ्यांना ऋण संख्या आणि धन संख्या यांचा गुणाकार करण्याची रीत समजली आहे का व त्याचा वापर ते करू शकतील का हे समजेल. त्याचबरोबर विद्यार्थी वरील गुणाकारातील आकृतिबंध समजून घेतील व त्याचा नंतर विस्तारही करतील हे ही शिक्षकांनी पहावे.



पायरी 2 मध्ये हे ही लक्षात येते की,

$$-6 = \times (-9) + 3$$

पायरी 3 मध्ये $-3 = \times (-6) + 3$

पायरी 4 मध्ये $0 = (-3) +$

या आकृतिबंधाचे निरीक्षण करून तो पुढीलप्रमाणे पुढे चालू ठेवला तर

$$(-3) \times (-1) = 0 + 3 = 3$$

$$(-3) \times (-2) = 3 + 3 = 6$$

यावरून शेवटी $(-3) \times (-2) = 6$ मिळते.

अशी आणखी उदाहरणे विद्यार्थ्यांकडून सोडवून घ्यावीत आणि उदाहरणे तयार करण्यासाठी प्रोत्साहन द्यावे तसेच ती एकमेकांमध्ये सोडवायला द्यावीत.

विद्यार्थ्यांना पूर्णांकाच्या प्रकारविषयी विचारावे. (उदा. धन आहे की ऋण) चर्चा करावी.

दोन्ही कृती (3 व 4) मध्ये उदाहरण चिन्हांसह कसे दिले आहे ते ही विचारावे.

जसे : ऋण 3 \times धन 2 (कृती 3)

ऋण 3 \times ऋण 2 (कृती 4)

विद्यार्थ्यांच्या आकलनाचे मूल्यांकन करावे.

आता त्यांना दृढीकरणाकरिता खालील गुणाकार विचारावा.

$$(-1) \times (-1) = \text{किती?}$$

$$(-1) \times (-1) \times (-1) = \text{किती?}$$

$$(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = \text{किती?}$$

$$(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = \text{किती?}$$

$$(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = \text{किती?}$$

$$(-2) \times (-3) \times (-5) = \text{किती?}$$

- विद्यार्थ्यांचा दोन चिन्हांकित संख्यांचा गुणाकार शिकून झाल्यावर वरीलप्रमाणे गुणाकार विचारावे. दोन ऋण संख्यांचा गुणाकार समजल्यावर तीन व चार संख्यांचे गुणाकार द्यावे व त्यांना उत्तरासाठी विचार करायला लावणे. तर्क करण्यास लावणे. या वरील खेळ तयार करून द्यावेत व गुणाकारात दोन वेळा, तीन वेळा..... ऋण चिन्ह आल्यावर उत्तरात ऋण चिन्ह येईल किंवा नाही? हे शोधायला सांगा. तीन संख्यांचा गुणाकार करायचा असेल तर आधी दोन संख्यांचा गुणाकार करून त्या उत्तराने तिसऱ्या संख्येला गुणायचे असते हे समजून द्यावे. खालीलप्रमाणे खेळातून शिकवा.

खेळ : खेळातून मुलांना आनंद मिळतो, मजा येते. त्याचबरोबर रहस्य निर्माण होते तर काही वेळेस निराशाही मिळते. खेळातून गणित शिकविल्यामुळे मुलांचा गणिताबद्दलचा दृष्टिकोन सुधारतो, प्रोत्साहन मिळते, शिवाय समस्या निराकरण क्षमता वाढते. गणितीय खेळ खेळताना ज्या चर्चा होतात त्यामुळे गणिताचे आकलन चांगले होते. NCERT चे इयत्ता सातवी गणिताच्या पाठ्यपुस्तकात पृष्ठ क्र. 13 वरील खेळ 1 चा संदर्भ घ्या. (परिशिष्ट क्र. 1) त्यामध्ये एका कागदावर चेक्स/चौकटी दिल्या आहेत. (जसे - सापशिडी व चेस बोर्डवर असतात तसे) त्यात 19 ओळी व 11 स्तंभ आहेत. त्या चौकटीत (-104) ते $(+104)$ पर्यंतच्या संख्या लिहिल्या आहेत.



- ज्यात 2 निळे व 2 लाल रंगाचे फासे आहेत अशी एक पिशवी घ्या. त्यातील समजा, निळ्या फाशावरील ठिपके (dots) धनसंख्या व लाल फाशावरील ठिपके (dots) ऋणसंख्या दर्शवितात असे मुले ठरवू शकतात. येथे आपण लाल ठिपके ऋण संख्येसाठी व निळे ठिपके धन संख्येसाठी घेतले आहेत.
- वर्गातील मुलांचे गट करा. गटातील मुलांची संख्या किती असावी तेही मुलेच ठरवतील. प्रत्येक गटातील मुले खेळ सांगतील. समजा प्रत्येक गटात 4 मुले आहेत.
- प्रत्येक जण आपली सोंगटी '0' शून्यावर ठेवून सुरु करतील.
- प्रत्येक विद्यार्थी पिशवी हालवून न पाहता दोन फासे काढतील. ते समान किंवा वेगळ्या रंगाचे असू शकतील.
- मुलांनी त्या दोन फाशांवरील संख्येचा गुणाकार करून सांगायचा.
- एकाच रंगातील दोन फासे असल्यास गुणाकार धन संख्या येईल म्हणून तो विद्यार्थी स्वतःची सोंगटी च्या दिशेत गुणाकाराएवढी पुढे जाईल किंवा त्याउलट गुणाकार ऋण संख्या असल्यास तेवढी घरे (- 104) च्या दिशेत जायचे.
- जो विद्यार्थी सर्वप्रथम (+ 104) किंवा (- 104) वर पोहोचेल तो जिंकणार.

हा खेळ खेळताना विद्यार्थी स्वतः अनेक गुणाकार करतो शिवाय गटातील विद्यार्थ्यांवरही लक्ष ठेवतो. म्हणून त्याला पूर्णांकांचा गुणाकार न चूकता करता येतो. खेळामुळे आकलन दृढीकरण होते व मुलांचा आत्मविश्वास वाढत राहतो. नेहमी लक्षात ठेवावे.

शिक्षक म्हणून तुम्हालाही कळते की मुलांना कितपत येते आहे? किंवा अजून मार्गदर्शनाची गरज आहे किंवा काय? खेळामुळे संबोध व संकल्पना पक्क्या होतात.

नमुना उदाहरण 5

अध्ययन निष्पत्ती :

त्रिमितीय आकाराचे पृष्ठफळ काढणे. त्रिमितीय आकाराचे घनफळ काढणे.

अध्ययन उद्दिष्टे :

- ही कृती केल्यावर विद्यार्थ्यांना घन व इष्टिकाचिती तयार करता येईल व पृष्ठफळाचे सूत्र तयार करणे.
- इष्टिकाचितीचे घनफळ काढण्याचे सूत्र तयार करणे.

कृती 1

लागणारे साहित्य : कार्डबोर्ड, पट्टी, कटर, सेलो टेप, स्केचपेन/पेन्सिल, पांढरा पेपर, चार्ट पेपर.

रीत : चार-चार विद्यार्थ्यांचे गट करावेत. विद्यार्थ्यांना वरील साहित्य द्यावे. विद्यार्थ्यांना समान भागाचे सहा चौरस प्रत्येक 'a' एककाचे (आकृती 1) करण्यास सांगावे. (a = 1, किंवा 2, किंवा 3 सेमी घ्या.) हे सहा चौरस जोडून आकृती 2 प्रमाणे त्रिमितीय ठोकळा तयार करा.

चर्चा/प्रात्यक्षिक : आकृती 2 वरून कोणत्या प्रकारचा त्रिमितीय आकार तयार झाला? त्याचे नाव विचारावे. उत्तर असेल 'घन' (cube) या वरून शिक्षकांना कळेल की कोणकोणते गुणधर्म वापरून विद्यार्थी घनाकृतीचे नाव ठरवितात.

या घनाचे प्रत्येक पृष्ठ, चौरस आहे व त्याची बाजू 'a' लांबीची आहे म्हणून या एका पृष्ठाचे क्षेत्रफळ 'a².'

अशी एकूण सहा पृष्ठे आहेत म्हणून घनाचे एकूण पृष्ठफळ 6a² होईल.

कृती 2

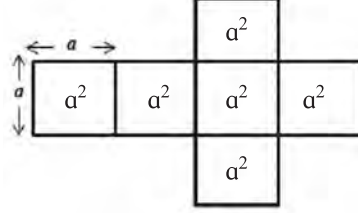
चर्चा : इष्टिकाचिती आकाराची वस्तू पाहून त्याला किती बाजू आहेत ते सांगा.

विद्यार्थी अशा वस्तूंचे जसे - खोडरबर, बॉक्स, खोली इ. चे निरीक्षण करून व चर्चा करून उत्तर देतील. त्यावरून शिक्षकांना माहीत होईल की, विद्यार्थ्यांना इष्टिकाचितीबद्दल काय काय माहिती आहे? किंवा कोणते गुणधर्म माहीत आहेत.

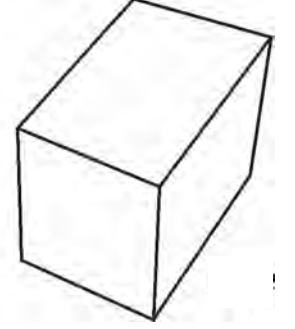
- एक इष्टिकाचिती दाखवा ज्याच्या बाजू a, b व c आहेत. विद्यार्थी स्वतः इष्टिकाचिती तयार करतील.



- मुले द्विमितीय (2D) आकृत्यांचे क्षेत्रफळ शिकले आहेत. त्यामुळे इष्टिकाचितीच्या सर्व पृष्ठांचा आकार कसा आहे असे विचारता येईल. त्यांना विचारा की सर्व पृष्ठांचा आकार समान आहे का? यापैकी कोणते असमान आहेत?
 - त्यानंतर ते या 3D आकाराबद्दल व मितीबद्दल चर्चा करतील.
 - इष्टिकाचितीचे पृष्ठफळ कसे काढायचे? पृष्ठफळ म्हणजे काय? इत्यादीसाठी पुरेसा वेळ व चर्चेला वाव द्यावा.
 - शेवटी विद्यार्थ्यांना आकलन होईल की सर्व पृष्ठांची क्षेत्रफळांची बेरीज म्हणजे एकूण पृष्ठफळ होय. a व b बाजू असणाऱ्या पुढील/मागील बाजूचे क्षेत्रफळ = ab
 - पुढील व मागील पृष्ठांचे एकूण क्षेत्रफळ = $ab + ab = 2ab$
 - वरील व खालील दोन समान पृष्ठांचे एकूण पृष्ठफळ = $bc + bc = 2bc$
 - बाकी राहिलेल्या दोन समान पृष्ठांचे एकूण पृष्ठफळ = $ac + ac = 2ac$
- ∴ इष्टिकाचितीचे एकूण पृष्ठांचे पृष्ठफळ = $2ab + 2bc + 2ca$
 $= 2(ab + bc + ac)$
- येथे जर $a = b = c$ असेल तर अशा घनाकृतीचे नाव काय? सर्व बाजू समान व त्रिमितीय म्हणून तो 'घन' cube आहे.
- ∴ $2a^2 + 2a^2 + 2a^2 = 6a^2$



(आकृती 1)

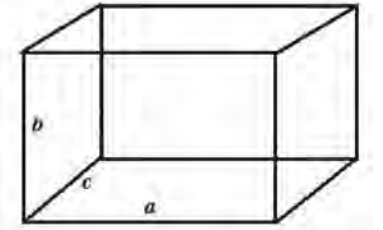


(आकृती 2)

कृती 3 :

लागणारे साहित्य : इष्टिकाचितीची घडणी तयार करण्यासाठी लांबी l , रुंदी b , व h उंची घ्या (समजा $l = 4$, $b = 4$ व $h = 3$ घेऊ)

- घडणीतून इष्टिकाचिती तयार करा. (आकृती 3 प्रमाणे)
- या इष्टिकाचिती मध्ये कले भरा म्हणजे भरीव इष्टिकाचिती तयार होईल. बाहेरील घडणी (Net) काढून टाका.
- या इष्टिकाचितीचे कटरच्या मदतीने 4 समान भाग करा. (आकृती 4 पहा)
- त्याच प्रमाणे रुंदीतूनही 4 समान भाग करा. (आकृती 5 पहा)
- शेवटी उंची $l = 3$ मधून ही 3 समान भाग करा. (आकृती 6 पहा)



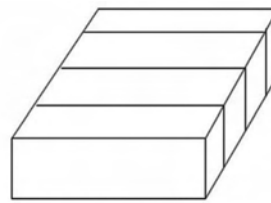
(आकृती 3)

चर्चा : पूर्ण इष्टिकाचितीचे 1 एकक बाजू असणाऱ्या घनात रूपांतर झाले. असे एकूण घन तयार झाले कारण $4 \times 4 \times 3$ मापाची इष्टिकाचिती घेतली आहे म्हणून.

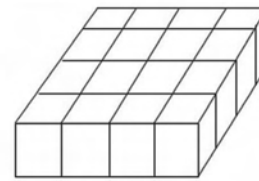
आता 1 एकक बाजू असणाऱ्या घनाचे घनफळ किती? $1 \times 1 \times 1$ आहे.

$$\therefore \text{इष्टिकाचितीचे घनफळ} = 4 \times 4 \times 3 \text{ घन एकक होईल.} \quad = l \times b \times h$$

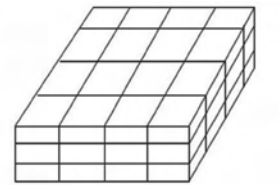
त्याचप्रमाणे विद्यार्थ्यांना वेगवेगळी मापे देऊन (जसे 2, 4, 4 एकक किंवा 3, 4, 5 एकक इत्यादी) इष्टिकाचिती तयार करून घन एककात रूपांतर करून घनफळ काढण्यास सांगावे.



(आकृती 4)



(आकृती 5)



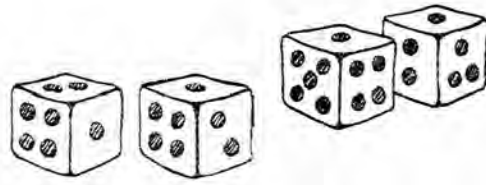
(आकृती 6)



या कृतीमुळे विद्यार्थ्यांना इष्टिकाचितीचे घनफळ = $l \times b \times h$ का आहे हे समजेल व हे सूत्र नेहमी लक्षात राहील. या चर्चेदरम्यान शिक्षकाने मुख्यत्वे विद्यार्थी दिलेल्या मापावरून चले वापरून 'सामान्यीकरण' 'Generalisation' कसे करतात? याचे निरीक्षण करावे. कारण कृतीचा हेतू हाच आहे.

परिशिष्ट क्र. 1

104	103	102	101	100	99	98	97	96	95	94
83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93
82	81	80	79	78	77	76	75	74	73	72
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
60	59	58	57	56	55	54	53	52	51	50
39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6
□ 5	□ 4	□ 3	□ 2	□ 1	0	1	2	3	4	5
□ 6	□ 7	□ 8	□ 9	□ 10	□ 11	□ 12	□ 13	□ 14	□ 15	□ 16
□ 27	□ 26	□ 25	□ 24	□ 23	□ 22	□ 21	□ 20	□ 19	□ 18	□ 17
□ 28	□ 29	□ 30	□ 31	□ 32	□ 33	□ 34	□ 35	□ 36	□ 37	□ 38
□ 49	□ 48	□ 47	□ 46	□ 45	□ 44	□ 43	□ 42	□ 41	□ 40	□ 39
□ 50	□ 51	□ 52	□ 53	□ 54	□ 55	□ 56	□ 57	□ 58	□ 59	□ 60
□ 71	□ 70	□ 69	□ 68	□ 67	□ 66	□ 65	□ 64	□ 63	□ 62	□ 61
□ 72	□ 73	□ 74	□ 75	□ 76	□ 77	□ 78	□ 79	□ 80	□ 81	□ 82
□ 93	□ 92	□ 91	□ 90	□ 89	□ 88	□ 87	□ 86	□ 85	□ 84	□ 83
□ 94	□ 95	□ 96	□ 97	□ 98	□ 99	□ 100	□ 101	□ 102	□ 103	□ 104



□□□

